Функциональный анализ и его приложения,
т. 4, вып. 2, 1970, 74—79

О ПРЕДСТАВИМОСТИ АЛГЕБРОИДНЫХ ФУНКЦИЙ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И АЛГЕБРОИДНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

А. Г. Хованский

В этой заметке дается необходимое условие представимости алгеброидной функции в виде суперпозиций аналитических функций и алгеброидных функций одной переменной. В частности, показывается, что алгеброидная функция двух переменных $z(a, b)$, определенная уравнением

$$z^5 + az + b = 0,$$

ни в какой окрестности нуля не представляется в виде таких суперпозиций.

Определение 1. Аналитический росток f_a, заданный в точке a окрестности $U \subseteq \mathbf{C}^n$, называется *алгеброидным* в этой окрестности, если он удовлетворяет некоторому неприводимому уравнению

$$f^n + p_1 f^{n-1} + \ldots + p_n = 0, \tag{1}$$

где p_i, $i = 1, \ldots, n$, являются аналитическими в окрестности U функциями.

Совокупность всех решений уравнения (1) в окрестности $V \subseteq U$ обозначается через $f(V)$.

Определение 2. Два аналитических ростка f_a и g_b, заданные соответственно в точках a и b окрестности $U \subseteq \mathbf{C}^n$, называются *эквивалентными* над этой окрестностью, $f_a \underset{U}{\sim} g_b$, если росток g_b получается из ростка f_a при продолжении вдоль некоторой кривой, лежащей в окрестности U.

Значение ростка f_a в точке a обозначается через $f(a)$.

Замыкание совокупности значений, которые принимают в точках области $V \subseteq U$ ростки g_b, эквивалентные над окрестностью U ростку f_a, обозначается через $f(V)$.

Дадим другое определение алгеброидного ростка.

Определение 3. Аналитический росток f_a, заданный в точке a окрестности $U \subseteq \mathbf{C}^n$, называется *алгеброидным* в окрестности U, если выполняются следующие условия: 1) существует аналитическое множество $M \subseteq U$ такое, что росток f_a аналитически продолжается вдоль любой кривой, лежащей в окрестности U, с началом в точке a, пересекающей множество M, быть может, только в начальный момент; 2) в каждой точке $b \in U$ существует лишь конечное число ростков, эквивалентных ростку f_a; 3) для каждого компакта $W \subset U$ множество $f(W)$ — компакт.

Любое множество M, удовлетворяющее первому условию, называется *запрещенным множеством* для ростка f_a.

Докажем эквивалентность определений 3 и 1. Пусть росток f_a удовлетворяет определению 1 и пусть D — дискриминантное множество уравнения (1). Легко видеть, что росток f_a удовлетворяет определению 3 с запрещенным множеством D. Обратно, пусть росток f_a удовлетворяет определению 3 с запрещенным множеством M.

Рассмотрим сначала случай, когда точка $a \notin M$. Пусть f_{ia}, $i = 1, \ldots, n$, $f_{1a} = f_a$ — совокупность всех ростков, эквивалентных над окрестностью U ростку f_a в точке a. Воспользовавшись теоремой Римана об устранимой особенности, легко получить, что симметрические функции ростков f_{ia}

$$p_1 = -\sum_{i=1}^{n} f_{ia}, \ldots, \quad p_n = (-1)^n f_{1a} \ldots f_{na}$$

будут ростками аналитических в окрестности U функций. Росток f_a удовлетворяет уравнению

$$f^n + p_1 f^{n-1} + \ldots + p_n = 0.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $a \in M$. Возьмем вместо ростка f_a росток g_b, эквивалентный ростку f_a над окрестностью U в точке $b \notin M$. Очевидно, что росток f_a удовлетворяет тому же уравнению, что и росток g_b.

Определение 4. Пусть f_a — непостоянный алгеброидный росток, удовлетворющий уравнению (1). Множество корней уравнения

$$b^n + p_1(x) b^{n-1} + \ldots + p_n(x) = 0$$

обозначается через $f^{-1}(b)$.

Определение 5. Точка a называется *регулярной* для неприводимого уравнения

$$y^n + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_n = 0,$$

где p_i — аналитические в окрестности U функции, если в этой точке существует ровно n различных ростков, удовлетворяющих этому уравнению. Точка a называется *регулярной* для алгеброидного ростка f_b в окрестности U, если существует запрещенное множество $M \subset U$, не содержащее точки a.

Определение 6. *Вектор-ростком* размерности k в точке a называется k аналитических ростков в точке a, заданных в определенном порядке $\mathfrak{f}_a = (f_{1a}, \ldots, f_{ka})$. На вектор-ростки естественным образом обобщаются все предыдущие определения.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{f}_a$ — алгеброидный k-мерный вектор-росток в окрестности $U \subseteq \mathbf{C}^n$, а g — аналитическая функция в области $V \subseteq \mathbf{C}^k$, причем $V \supseteq \mathfrak{f}(U)$. Тогда* 1) *росток $g \circ f_a$ алгеброиден в окрестности U,* 2) *существует аналитическое множество $M \subset U$ такое, что если росток $p_b \overset{U}{\sim} g \circ \mathfrak{f}_a$ и точка b лежит в $U \setminus M$, то $p_b = g \circ \varphi_b$, где φ_b — некоторый росток, эквивалентный над окрестностью U ростку $\mathfrak{f}_a$.*

Доказательство. В качестве запрещенного множества M для ростка $g \circ \mathfrak{f}_a$ достаточно взять любое запрещенное множество ростка $\mathfrak{f}_a$. Оно будет также удовлетворять и условию, содержащемуся во втором утверждении леммы.

Лемма 2. *Пусть f_a — алгеброидный росток в окрестности $U \subseteq \mathbf{C}^n$, не равный константе, а g_c — алгеброидный росток в окрестности $V \subseteq \mathbf{C}^1$, причем $V \supseteq f(U)$ и $c = f(a)$. Тогда* 1) *росток $g_c \circ f_a$ алгеброиден в окрестности U,* 2) *существует аналитическое множество $M \subset U$ такое, что если росток $p_b \overset{U}{\sim} g_c \circ f_a$ и точка b лежит в $U \setminus M$, то $p_b = q_d \circ \varphi_b$, где $d = \varphi(b)$, φ_b — некоторый росток, эквивалентный над окрестностью U ростку f_a, q_d — некоторый росток, эквивалентный над окрестностью V ростку g_c.*

Доказательство. Пусть $D(x)$ — дискриминант неприводимого уравнения, которому удовлетворяет росток g_c. Согласно лемме 1 росток $D \circ f_a$ алгеброиден в окрестности U. Легко проверить, что росток $D \circ f_a$ не равен тождественно константе. Обозначим через M_1 множество $(D \circ f)^{-1}(0)$ (см.

определение 4) и через M_2 — некоторое запрещенное множество ростка f_a. В качестве запрещенного множества M для ростка $g_c \circ f_a$ достаточно взять множество $M_1 \bigcup M_2$. Оно будет также удовлетворять условию, содержащемуся во втором утверждении леммы.

Введем еще несколько обозначений.

Кольцо аналитических ростков на линейно связном множестве $X \subseteq \mathbf{C}^n$ обозначим через H^n_X. Это кольцо есть область целостности. Соответствующее поле частных обозначим через L^n_X.

Пусть $\mathbf{f}_a = (f_{1a}, \ldots, f_{ka})$ — алгеброидный в окрестности $U \subseteq \mathbf{C}^n$ вектор-росток и $P_i(f_i, H^n_U) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, — неприводимые уравнения его компонент. Поле разложения многочленов P_i над полем L^n_X обозначим через $L^n_X(\mathbf{f})$. Группу Галуа поля $L^n_X(\mathbf{f})$ над полем L^n_X обозначим через $\Gamma^n_X(\mathbf{f})$. Подкольцо поля $L^n_X(\mathbf{f})$, натянутое на кольцо H^n_X и корни всех многочленов $P_i(f_i, H^n_U) = 0$, обозначим через $H^n_X(\mathbf{f})$. Если точка a лежит в множестве X, то можно определить кольцо $H^n_X\langle \mathbf{f}_a \rangle$ — подкольцо кольца H^n_a, натянутое на кольцо H^n_X и ростки $f_{1a}, \ldots, f_{ka}$.

Легко видеть, что если a — регулярная точка ростка f_b, $f_{1a}, \ldots, f_{ka}$ — совокупность всех ростков в точке a, эквивалентных ростку f_b над окрестностью U, X — линейно связное множество, содержащее точку a, то справедливо равенство

$$H^n_X\langle f_{1a}, \ldots, f_{ka} \rangle = H^n_X(f).$$

Прежде чем формулировать лемму 3, заметим, что если уравнение $y^k + p_1 y^{k-1} + \ldots + p_k = 0$, где p_i — аналитические функции в окрестности V, содержащей точку a, неприводимо над кольцом H^n_a, то в точке a сливаются все k корней этого уравнения.

Лемма 3. *Пусть $P_i(y_i, H^n_a) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, — целые неприводимые уравнения над кольцом H^n_a; $b_i = y_i(a)$ — значения функций y_i в точке a; $b = (b_1, \ldots, b_k)$ — точка, лежащая в пространстве $\mathbf{C}^k$; $g \in H^k_b$ — аналитический росток в точке $b \in \mathbf{C}^k$. Тогда у точки a имеется окрестность V такая, что*

1) *уравнения $P_i(y_i, H^n_a) = 0$ продолжаются до уравнений $P_i(y_i, H^n_V) = 0$ в этой окрестности, а функция g может быть определена в окрестности U, содержащей $\mathbf{y}(V)$;*

2) *для каждой точки d окрестности V и вектор-ростка $\mathbf{y}_d$, удовлетворяющего уравнениям $P_i(y_{id}, H^n_V) = 0$, кольцо $H^n_V\langle g \circ \mathbf{y}_d \rangle$ содержится в кольце $H^n_V\langle \mathbf{y}_d \rangle$.*

Доказательство. Возьмем в пространстве $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$ точку (a, b). Рассмотрим в кольце $H^{n+k}_{(a, b)}$ ростки $P_i(y_i, H^n_a)$ и росток g^*, получающийся из ростка g при проектировании $\pi: \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k \to \mathbf{C}^k$. Выберем столь малую окрестность V точки a в пространстве $\mathbf{C}^n$, чтобы было возможно последовательное применение теоремы Вейерштрасса о делении ростков. Применяя эту теорему, получим, что

$$g \circ \mathbf{y}_d = \sum_{|i| < m} p_i \mathbf{y}^i_d,$$

где $i = (i_1, \ldots, i_k)$, $|i| = i_1 + \ldots + i_k$; $\mathbf{y}^i_d = y^{i_1}_{1d} \ldots y^{i_k}_{kd}$; $p_i \in H^n_V$; m — некоторое целое число. Поэтому $H^n_V\langle g \circ \mathbf{y}_d \rangle \subseteq H^n_V\langle \mathbf{y}_d \rangle$.

Лемма 4. *Пусть $P_1(y, H_a^n)=0$ и $P_2(z, H_b^1)=0$ — целые неприводимые уравнения над соответствующими кольцами, $y(a)=b$ и y не есть константа. Тогда у точки a имеются окрестность V и аналитическое множество $M\subset V$ такие, что*

1) *уравнение $P_1(y, H_a^n)=0$ продолжается до уравнения $P_1(y, H_V^n)=0$ в окрестности V, а уравнение $P_2(z, H_b^1)=0$ — до уравнения $P_2(z, H_U^1)=0$ в окрестности U, содержащей $y(V)$;*

2) *каждая точка c, лежащая в множестве $V\setminus M$, регулярна для уравнения $P_1(y, H_V^n)=0$ и для каждого ростка y_c, удовлетворяющего уравнению $P_1(y, H_V^n)=0$, точка $y(c)$ регулярна для уравнения $P_2(z, H_U^1)=0$;*

3) *для каждой точки c множества $V\setminus M$ кольцо $H_V^n\langle z_p\circ y_c\rangle$ содержится в кольце $H_V^n\langle y_c, t_c\rangle$, где y_c удовлетворяет уравнению $P_1(y, H_V^n)=0$, $p=y(c)$ и z_p удовлетворяет уравнению $P_2(z, H_U^1)=0$, t_c — аналитический росток в точке c, некоторая степень которого лежит в кольце $H_V^n\langle y_c\rangle$, т. е. $t_c^m\in H_V^n\langle y_c\rangle$.*

Доказательство. Будем считать, что $y(a)=0$. Так как уравнение $P_2(z, H_a^1)=0$ неприводимо, то, как известно, $z=\varphi(\sqrt[m]{x})$, где функция φ аналитична в окрестности точки 0. Пусть $P_1(y, H_a^n)=y^k+p_1y^{k-1}+\ldots+p_k$. Рассмотрим многочлен $Q(t, H_a^n)=t^{mk}+p_1t^{m(k-1)}+\ldots+p_k$. Пусть $Q(t, H_a^n)=$ $=\prod_{i=1}^{l}Q_i(t, H_a^n)$ — разложение этого многочлена на неприводимые множители. Положим $V=\bigcap_{i=1}^{l}V_i$, где V_i — окрестности, в которых выполняются условия леммы 3 для уравнений $Q_i(t, H_a^n)=0$ и функции φ. Пусть M_1 — некоторое запрещенное множество для уравнения $P_1(y, H_a^n)=0$ и M_2 — множество нулей функции $p_k(x)$. Положим $M=M_1\bigcap M_2$. Тогда окрестность V и множество M удовлетворяют условию леммы. Остановимся только на доказательстве третьего утверждения леммы.

Пусть $c\in V\setminus M$. Тогда 1) точка c регулярна для уравнения $P_1(y, H_V^n)=0$, так как $c\in V\setminus M_1$, 2) для каждого ростка y_c, удовлетворяющего уравнению $P_1(y, H_a^n)=0$, значение ростка $y(c)\neq 0$, так как $c\in V\setminus M_2$. Поскольку $y(c)\neq 0$, равенство $z\circ y_c=\varphi(\sqrt[m]{y_c})$ имеет смысл. Росток $t_c=\sqrt[m]{y_c}$ удовлетворяет уравнению $Q(t, H_a^n)=0$ и, следовательно, одному из неприводимых уравнений $Q_i(t, H_a^n)=0$. Применяя к ростку t_c и функции φ лемму 3, получим, что кольцо $H_V^n\langle z_p\circ y_c\rangle$ содержится в кольце $H_V^n\langle y_c, t_c\rangle$.

Теорема 1. *Если f_a — алгеброидный в окрестности $U\subseteq \mathbf{C}^n$ росток, g_c — алгеброидный росток в окрестности $V\subseteq\mathbf{C}^1$, содержащей $f(U)$, и $c=f(a)$, то росток $g_c\circ f_a$ алгеброиден в окрестности U и для любой точки $b\in U$ кольцо $H_b^n(g\circ f)$ содержится в кольце $RH_b^n(f)$, где $RH_b^n(f)$ — некоторое радикальное расширение кольца $H_b^n(f)$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы содержится в лемме 2. Обозначим через $P(f, H_U^n)=0$ неприводимое в H_U^n уравнение, которому удовлетворяет росток f_a. Пусть $\prod_{i=1}^{l}P_i(f_i, H_b^n)$ — его разложение в кольце H_a^n и $f_i(b)=c_i$. Пусть $\prod_j G_{ij}(g_{ij}, H_{c_i}^1)$ — разложения на неприводимые множители уравнения ростка g_c в кольцах $H^1_{c_i}$. Положим $V = \bigcap_{i,j} V_{ij}$, где V_{ij} — окрестности, удовлетворяющие условию леммы 4 для уравнений $P_i(f_i, H^n_b) = 0$ и $G_{ij}(g_{ij}, H^1_{c_i}) = 0$. Тогда из второго утверждения леммы 2 и из леммы 4 следует, что кольцо $H^n_V(f \circ g)$ содержится в кольце $RH^n_V(f)$, где $RH^n_V(f)$ — некоторое радикальное расширение кольца $H^n_V(f)$. Поэтому $H^n_b(g \circ f) \subseteq RH^n_b(f)$.

Теорема 2. *Если* $\mathfrak{f}_a$ *— алгеброидный в окрестности* U *вектор-росток и* g *— аналитическая функция в окрестности* V, *содержащей* $\mathfrak{f}(U)$, *то росток* $g \circ \mathfrak{f}_a$ *алгеброиден в окрестности* U *и для любой точки* $b \in U$ *кольцо* $H^n_b(g \circ \mathfrak{f})$ *содержится в кольце* $H^n_b(\mathfrak{f})$.

Теорема 2 доказывается с помощью лемм 1 и 3, аналогично тому как теорема 1 доказывалась с помощью лемм 2 и 4.

Нам потребуется следующая теорема из теории Галуа: конечное расширение поля нулевой характеристики радикально тогда и только тогда, когда группа Галуа наименьшего расширения Галуа, содержащего это конечное расширение, разрешима.

Из этой теоремы и из теорем 1 и 2 непосредственно вытекают такие следствия.

Следствие 1. *Необходимым условием представимости алгеброидной в окрестности* U *функции* f *в виде суперпозиций аналитических функций и алгеброидных функций одной переменной является разрешимость группы* $\Gamma^n_a(f)$ *в каждой точке* a *окрестности* U.

Следствие 2. *Пусть в кольце* H^n_a *задано целое неприводимое уравнение*

$$y^n + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_n = 0,$$

где $p_i \in H^n_a$. *Необходимым и достаточным условием существования окрестности* U *точки* a, *в которой алгеброидная функция* y, *удовлетворяющая этому уравнению, представляется в виде суперпозиций аналитических функций и алгеброидных функций одной переменной, является разрешимость группы* $\Gamma^n_a(y)$.

Остановимся теперь на геометрическом смысле группы $\Gamma^n_U(f)$.

Пусть f_a — алгеброидный росток в окрестности U, M — его запрещенное множество, V — окрестность, лежащая в окрестности U, $c \in V \setminus M$ — регулярная точка ростка f_a и $Q_c = (f_{1c}, \ldots, f_{kc})$ — полный набор ростков, эквивалентных ростку f_a над окрестностью U в точке c. Возьмем замкнутую кривую $\gamma(t)$, лежащую в $V \setminus M$, с началом в точке c.

Продолжая ростки f_{ic} вдоль кривой $\gamma(t)$, получим некоторую перестановку множества Q_c. Легко видеть, что указанное соответствие задает гомоморфизм τ фундаментальной группы $\pi_1(V \setminus M)$ в группу $S(k)$ — группу перестановок k элементов, $\tau: \pi_1(V \setminus M) \to S(k)$.

Определение 7. Образ фундаментальной группы при описанном гомоморфизме называется *группой монодромии* ростка f_a на окрестности V и обозначается символом $M^n_V(f)$.

Группа монодромии $M^n_V(f)$ естественно действует на поле $L^n_V(f) = L^n_V\langle f_{1c}, \ldots, f_{kc}\rangle$. Полем инвариантов относительно этого действия является поле L^n_V. Таким образом, группа $M^n_V(f)$ совпадает с группой $\Gamma^n_V(f)$.

Если $W \subseteq U$, то $M^n_W(f) \subseteq M^n_U(f)$. Пусть теперь X — произвольное линейно связное подмножество U и $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots \supseteq U_m \supseteq \ldots \supseteq X$, $\bigcap_i U_i = X$, где U_i — связные окрестности в окрестности U. Тогда $M^n_{U_1} \supseteq M^n_{U_2} \supseteq \ldots$ Поэтому группы $M^n_{U_i}$ стабилизируются.

Определение 8. *Группой монодромии* ростка f_a на линейно связном множестве $X \subseteq \mathbf{C}^n$ называется его группа монодромии на достаточно малой связной окрестности V множества X. Эта группа обозначается символом $M_X^n(f)$.

Нетрудно показать, что группа $M_X^n(f)$ изоморфна группе $\Gamma_X^n(f)$.

Лемма 5. *Рассмотрим неприводимое уравнение*

$$y^n + p_1(x) y^{n-1} + \ldots + p_n(x) = 0$$

в односвязной области U комплексной плоскости. Пусть функция $y(x)$ не имеет кратных точек ветвления, т. е. в каждой точке $b \in U$ существует не менее $n-2$ различных аналитических ростков y_{i_b}, удовлетворяющих этому уравнению. Тогда $\Gamma_U^1(y) = S(n)$.

Доказательство. Обозначим через $D = \{a_i\}$ дискриминантное множество. Пусть c — некоторая точка в $U \setminus D$ и γ_i — замкнутая кривая в $U \setminus D$ с началом в точке c, обходящая точку a_i. Кривые γ_i образуют базис в группе $\pi_1(U \setminus D)$. Согласно условию этим кривым в группе монодромии $M_U^1(y)$ соответствуют или тождественные подстановки или транспозиции. Группа монодромии транзитивна, так как уравнение неприводимо. Единственной транзитивной группой подстановок, натянутой на транспозиции, является группа всех подстановок.

Рассмотрим над кольцом H_0^2 уравнение $z^5 + az + b = 0$. Вычислим группу $\Gamma_0^2(z)$, где $z(a, b)$ — алгебраическая функция, определяемая этим уравнением. Группа $\Gamma_0^2(z)$ изоморфна группе $M_U^2(z)$, где U — достаточно малая окрестность начала координат. Рассмотрим алгебраическую функцию $z(a_0, b)$ переменной b при $a_0 \neq 0$. Ее дискриминантное множество состоит из четырех решений уравнения $5^5 b^4 = 4^4 a_0^5$. Легко проверить, что над каждой точкой дискриминантного множества сливаются ровно два корня. Поэтому согласно лемме 5 группа монодромии функции $z(a_0, b)$ при $a_0 \neq 0$ есть $S(5)$. Можно выбрать столь малое по модулю число a_0, что все четыре точки дискриминантного многообразия будут лежать в окрестности U. Отсюда следует, что группа $\Gamma_0^2(z)$ есть $S(5)$. Так как группа $S(5)$ неразрешима, то по следствию 2 алгебраическая функция двух переменных $z(a, b)$, определенная уравнением $z^5 + az + b = 0$, ни в какой окрестности нуля не представляется в виде суперпозиции аналитических функций и алгеброидных функций одной переменной.

Заметим, что функцию $z(a, b)$ можно легко представить в виде суперпозиций алгебраических функций одной переменной и арифметических операций (сложение, умножение, деление) над ними. Мы, в частности, доказали, что в любом таком представлении должна участвовать операция деления.

Автор благодарен В. И. Арнольду за постановку задачи и полезные обсуждения.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 29 сентября 1969 г.