О СУПЕРПОЗИЦИЯХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С РАДИКАЛАМИ

А. Г. Хованский

Теорема Галуа о разрешимости алгебраических уравнений полностью описывает функции, представимые суперпозициями радикалов и многочленов. В заметке рассматривается близкая задача — описываются функции, представимые суперпозициями радикалов и однозначных аналитических функций. Полученный результат применяется к алгебраическим функциям от нескольких комплексных переменных.

1. Обозначения. Пусть $U \subseteq \mathbf{C}^n$ — фиксированная связная область. Многозначная функция y называется *алгеброидной* в U, если она удовлетворяет некоторому неприводимому уравнению $y^n + P_1y^{n-1} + \ldots + P_n = 0$, где P_k аналитичны в U. Фундаментальную группу $\pi_1(U \setminus D)$, где D — аналитическое подмножество, будем обозначать $F(D)$. Для каждой группы G ее m-й коммутант будем обозначать G^m. Пусть $H(D, m)$ — накрывающая области $U \setminus D$, соответствующая подгруппе F^m. Алгеброидную функцию будем называть *R-функцией*, если она становится однозначной на некоторой поверхности $H(D, m)$.

2. Леммы. Лемма 1. *Если $m_1 \geqslant m_2$ и $D_1 \supseteq D_2$, то существует естественная проекция ρ: $H(D_1, m_1) \to H(D_2, m_2)$. Поэтому всякая функция, однозначная на $H(D_2, m_2)$, тем более однозначна на $H(D_1, m_1)$.*

Действительно, пусть p_*: $F(D_1) \to F(D_2)$ — гомоморфизм, индуцированный вложением p: $U \setminus D_1 \to U \setminus D_2$. Как и при всяком гомоморфизме, $p_*^{-1}[F^{m_2}(D_2)] \subseteq F^{m_2}(D_1)$. Добавив к этому очевидное включение $F^{m_2}(D_1) \supseteq F^{m_1}(D_1)$, получим нужный результат.

Лемма 2. *Однозначная аналитическая функция от R-функций есть R-функция.*

Действительно, пусть R-функции $y_1, \ldots, y_k$ однозначны на поверхностях $H(D_1, m_1), \ldots, H(D_k, m_k)$. Тогда по лемме 1 на поверхности $H(D, m)$, где $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_k$ и $m = \max\{m_i\}$, будут однозначны все функции $y_1, \ldots, y_k$ одновременно и, следовательно, любая голоморфная функция от них. Остается заметить, что голоморфная функция от алгеброидных функций также алгеброидна [1].

Лемма 3. *Корень любой степени из R-функции есть R-функция.*

Действительно, пусть R-функция y однозначна на поверхности $H(D_1, m)$ и $D_2 \subseteq U$ — множество ее нулей. По лемме 1 y будет однозначна на поверхности $H(D, m)$, где $D = D_1 \cup D_2$, и иногда не равна нулю. Возникает отображение y: $H(D, m) \to C \setminus \{0\}$. Пусть y_*: $F^m(D) \to \pi_1(C \setminus \{0\}) = \mathbf{Z}$ — индуцированный гомоморфизм. Группа $\mathbf{Z}$ коммутативна, поэтому $\ker y_* \supseteq F^{m+1}(D)$. Итак, петли $y_*[F^{m+1}(D)]$ «не обходят вокруг точки 0» и, следовательно, значение функции $\sqrt[n]{y}$ не меняется при продолжении вдоль петель из группы $F^{m+1}(D)$. Иными словами, функция $\sqrt[n]{y}$ однозначна на поверхности $H(D, m+1)$.

Лемма 4. *Алгеброидная в области U функция обладает разрешимой группой монодромии, если и только если она есть R-функция.*

Действительно, пусть D — дискриминантное множество функции y, M — ее группа монодромии и p: $F(D) \to M$ — естественный гомоморфизм. Если M разрешима, то $M^m = e$ при некотором m. Функция y однозначна на поверхности $H(D, m)$, так как $F^m(D) \subseteq p^{-1}(M^m) = p^{-1}(e)$. Обратно, если функция y однозначна на $H(D, m)$, то $p[(F^m(D)] = e$. Так как p есть гомоморфизм на, то $p[F^m(D)] = M^m$. Следовательно, группа M разрешима.

3. Основная теорема. *Всякая функция, представимая суперпозициями однозначных аналитических функций любого числа переменных и радикалов, есть алгеброидная функция с разрешимой группой монодромии.*

Действительно, леммы 2 и 3 показывают, что суперпозиции с однозначными функциями и радикалами не выводят из класса R-функций. Лемма 4 утверждает, что группа монодромии R-функции разрешима.

Обратное утверждение также верно. Справедлива даже следующая более сильная

Теорема. *Если алгеброидная в окрестности U функция y обладает разрешимой группой монодромии, то она представима суперпозициями голоморфных в U функций радикалами и целой функцией $\varphi(x, z) = x + z$.*

Действительно, рассмотрим комплексную алгебру $C(y)$, натянутую на все ростки $y_{1a}, \ldots, y_{ka}$ функции y в неособой точке a. На этой алгебре естественно действует группа монодромии M, которая по условию разрешима. Подалгебра инвариантов $C_0(y)$ состоит из однозначных алгеброидных функций, т. е. из функций, голоморфных в U. Нужный результат теперь следует из теории Галуа.

4. Локальная представимость. Целая алгебраическая функция y одного переменного x в некоторой окрестности точки ветвления p представляется суперпозициями однозначных функций и радикалов (именно, $y(x) = f(\sqrt[m]{x-p})$, где m — порядок ветвления и f аналитична в нуле).

Для функций y нескольких переменных подобное представление существует, если и только если локальная группа монодромии функции y в точке ветвления разрешима.

Для доказательства достаточно применить предыдущие теоремы к малой окрестности точки ветвления. Например, функция $y(a, b)$, заданная равенством $y^5 + ay + b = 0$, ни в какой окрестности нуля не есть суперпозиция однозначных функций и радикалов, так как локальная группа монодромии функции y в точке нуль есть S (5) [1]. Заметим, что результат п. 4 другим путем был получен в статье [1].

5. Целые алгебраические уравнения. Теперь рассмотрим случай $U = \mathbf{C}^n$. Пусть дано целое уравнение $y^k + P_1y^{k-1} + \ldots + P_k = 0$, где $P_i = P_i(\#)$ — многочлены от n комплексных переменных.

Если группа монодромии функции $y(\#)$ разрешима, то это уравнение разрешается в радикалах, причем без использования операции деления (но пользуясь умножением на рациональные числа).

Для доказательства достаточно заметить, что в этом случае алгебра инвариантов $C_0(y)$ (см. п. 3) состоит из целых однозначных алгебраических функций, т. е. из многочленов.

Если же группа монодромии функции $y(\#)$ неразрешима, то основная теорема показывает, что функция $y(\#)$ не есть суперпозиция целых функций никакого числа переменных и радикалов.

Автор глубоко благодарен В. И. Арнольду за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Хованский, О представимости алгеброидных функций суперпозициями аналитических функций и алгеброидных функций одной переменной, Функц. анализ **4**:2 (1970), 74—79.

Поступило в Правление общества 12 октября 1970 г.