МНОГОГРАННИКИ НЬЮТОНА

Д. Н. Бернштейн, А. Г. Кушниренко, А. Г. Хованский

Эта заметка является кратким изложением доклада, прочитанного нами на заседании Московского математического общества 21 октября 1975 г. Исследования, о которых мы будем говорить, были начаты А. Г. Кушниренко. Отправной точкой послужил богатый экспериментальный материал, накопленный В. И. Арнольдом в работах по классификации особых точек функций. В частности, он сформулировал в качестве гипотезы теорему 5. Попытки ее доказательства привели к теореме 6, за которой последовали остальные теоремы этой заметки.

Многочленом Лорана называется *отображение* $f\colon (\mathbf{C}\setminus 0)^k\to\mathbf{C}$, заданное конечной суммой $f=\sum a_n x^n$ $(n\in\mathbf{Z}^k)$. Множество $\operatorname{supp} f=\{n\in\mathbf{Z}^k\colon a_n\neq 0\}$ называется *носителем* f, выпуклая оболочка $\operatorname{supp} f$ в $\mathbf{R}^k$ называется *многогранником Ньютона* f и обозначается $\Gamma(f)$. Многогранник вида $\Gamma(f)$ называется *целочисленным*. Положим $\mathbf{C}[\Gamma]=\{f\colon \operatorname{supp} f\subset\Gamma\}$.

Теорема 1 (Д. Н. Бернштейн). *Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ — целочисленные многогранники в $\mathbf{R}^k$. Тогда для почти всех наборов, т. е. для открытого, по Зарискому, множества наборов $(f_1, \ldots, f_k)\in\mathbf{C}[\Gamma_1]\oplus\ldots\oplus\mathbf{C}[\Gamma_k]$ число решений системы $f_1=\ldots=f_k=0$ на множестве $(\mathbf{C}\setminus 0)^k$ равно $k!\cdot v(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$, где $v(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$ — смешанный объем $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$.*

Теорема 1 обобщает результат А. Г. Кушниренко, разобравшего случай $\Gamma_1=\ldots=\Gamma_k=\Gamma$ (в этом случае $v(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$ равен объему многогранника Γ.) Мы знаем пять различных доказательств этой теоремы. Одно из них (А. Г. Хованский) дает более общий результат — теорему Безу для гладких торических k-мерных многообразий: дивизорам на таких многообразиях соответствуют некоторые самопересекающиеся многогранники, а индекс пересечения дивизоров равен умноженному на $k!$ смешанному объему этих многогранников. Другое доказательство (А. Г. Кушниренко) использует любопытную комбинаторику. Обозначим через $N(\Gamma)$ число целых точек в Γ.

Теорема 2. *Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ — целочисленные многогранники в $\mathbf{R}^k$. Тогда для $i_1\geqslant 0, \ldots, i_m\geqslant 0$ $N(i_1\Gamma_1+\ldots+i_m\Gamma_m)$ — многочлен от $i_1, \ldots, i_m$.*

(Случай $m=1$ и случай $k=2$ разобраны А. Г. Кушниренко, общий случай — Д. Н. Бернштейном.)

Теорема 3. *Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ — целочисленные многогранники в $\mathbf{R}^k$, $k\geqslant m$. Тогда для почти всех наборов $(f_1, \ldots, f_m)\in\mathbf{C}[\Gamma_1]\oplus\ldots\oplus\mathbf{C}[\Gamma_m]$ эйлерова характеристика множества $f_1^{-1}(0)\cap\ldots\cap f_m^{-1}(0)\cap(\mathbf{C}\setminus 0)^k$ равна*

$$(-1)^{k-m}k!\sum v(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m, \Gamma_{i_1}, \ldots, \Gamma_{i_{k-m}}),\quad \text{при}\quad 1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_{k-m}\leqslant m.$$

(Случай $m=1$ разобран всеми авторами одновременно, $m=k-1$ — А. Г. Хованским, общий случай — Д. Н. Бернштейном.)

Многообразие $X=f_1^{-1}(0)\cap\ldots\cap f_m^{-1}(0)\cap(\mathbf{C}\setminus 0)^k$, как правило некомпактно. Полезна следующая конструкция. Пусть σ — разбиение пространства $\mathbf{R}^{k*}$ на конусы, двойственное многограннику $\Gamma=\Gamma_1+\ldots+\Gamma_m$ и σ' — правильное симплициальное подразбиение σ. Пусть M — гладкое компактное торическое многообразие, отвечающее σ' и $\varphi\colon M\to(\mathbf{C}\setminus 0)^k$ — естественный бирациональный изоморфизм.

Теорема 4 (А. Г. Хованский). *Для почти всех $(f_1, \ldots, f_m)\in\mathbf{C}[\Gamma_1]\oplus\ldots\oplus\mathbf{C}[\Gamma_m]$ собственный прообраз $\overline{X}$ многообразия X при отображении φ является гладким подмногообразием в M, трансверсальным орбитам многообразия M.*

Гипотеза[1]) (А. Г. Хованский). *Пусть $f\in\mathbf{C}[\Gamma]$. Обозначим через $\gamma(f)$ размерность пространства голоморфных форм старшей размерности на компактном гладком многооб-*

[1]) Сейчас эта гипотеза доказана. В предположениях теоремы 4 вычислен арифметический ряд $\overline{X}$ и если $\dim\,\Gamma_i=k$, найдены все числа $h^{p,0}(\overline{X})$. (А.Г. Хованский).

разии, бирационально эквивалентном $f^{-1}(0)$. *Тогда для почти всех* $f \in \mathbf{C}[\Gamma]$ $\gamma(f)$ *равняется числу целых точек, лежащих строго внутри многогранника* Γ.

Назовем многогранником Ньютона $\Gamma_+(M)$ множества $M \subset \mathbf{Z}_+^k$ выпуклую оболочку $\bigcup(m + \mathbf{R}_+^k)$, $m \in M$, в пространстве $\mathbf{R}_+^k$. Для многогранника Γ_+ обозначим через $\mathbf{C}\{\Gamma_+\}$ множество сходящихся степенных рядов вида $f = \sum a_n x^n$, где $n \in \Gamma_+ \cap \mathbf{Z}^k$, $a_n \in \mathbf{C}$. Положим

$$\mathbf{R}_{i,\ldots,p} = \{t \in \mathbf{R}_+^k \mid t_i = \ldots = t_p = 0\}, \quad \Gamma_{i,\ldots,p} = \Gamma_+ \cap \mathbf{R}_{i,\ldots,p}.$$

Модальностью $m(f)$ функции f В. И. Арнольд называет размерность пространства орбит группы диффеоморфизмов в пространстве сходящихся степенных рядов без свободного и линейного членов в окрестности орбиты точки f.

Теорема 5 (А. Г. Кушниренко). *Предположим, что многогранник Ньютона* $\Gamma_+ \subset \mathbf{R}_+^2$ *пересекается с координатными осями. Пусть* $B = (2, 2) + \mathbf{R}_+^2$, *а* D — *замыкание множества* $B \setminus \Gamma_+$. *Тогда для почти всех* $f \in \mathbf{C}\{\Gamma_+\}$ $m(f)$ *равно числу целых точек в многограннике* D.

Числом Милнора $\mu(f)$ особой точки 0 аналитической функции f называется кратность нулевого решения системы $\partial f/\partial x_1 = \ldots = \partial f/\partial x_k = 0$.

Теорема Милнора. *Пусть* $f(0) = 0$. *Тогда для достаточно малого* $\delta > 0$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$: 1) *множество* $\bigcup F_y$, $|y| = \varepsilon$, *где* $F_y = \{x \in \mathbf{C}^k \mid |x| \leqslant \delta,\ f(x) = y\}$, *является расслоением над* S^1 *со слоем* F_ε; 2) *если* $\mu(f) < \infty$, *то* F_ε *гомотопически эквивалентно букету* $\mu(f)$ $(k-1)$-*мерных сфер*.

Теорема 6 (А. Г. Кушниренко). *Пусть* Γ_+ *пересекается со всеми координатными осями. Тогда для почти всех* $f \in \mathbf{C}\{\Gamma_+\}$

$$\mu(f) = k!\,V - (k-1)! \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} V_i + (k-2)! \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} V_{i,j} + \ldots + (-1)^k,$$

где V — k-*мерный объем дополнения к* Γ_+ *в* $\mathbf{R}_+^k$, V_i — $(k-1)$-*мерный объем дополнения к* Γ_i *в* $\mathbf{R}_i$ *и т. д.*

Характеристическое отображение расслоения, фигурирующего в теореме Милнора, индуцирует автоморфизм монодромии $\psi(f)$: $H^*(F_\varepsilon, \mathbf{C}) \to H^*(F_\varepsilon, \mathbf{C})$. А. Н. Варченко сопоставляет каждому многограннику Ньютона Γ_+ рациональную функцию $\zeta(\Gamma_+)$ от λ.

Теорема 7 (А. Н. Варченко). *Для почти всех* $f \in \mathbf{C}\{\Gamma_+\}$ *справедливо равенство*

$$\zeta(\Gamma_+) = \prod \{\det(E - \lambda\psi(f);\ H^q(F_\varepsilon, \mathbf{C}))\}^{(-1)^q}, \quad q \geqslant 0.$$

Приведем конструкцию $\zeta(\Gamma_+)$. Пусть X_+ — многогранник Ньютона в $\mathbf{R}_+^n$. Обозначим через $\theta(X_+)$ произведение по всем компактным $(n-1)$-мерным граням $\Delta \subset X_+$ многочленов вида $(1 - \lambda^{h(\Delta)})^{s(\Delta)}$, где $h(\Delta)$ — число элементов в фактор-группе группы $\mathbf{Z}^n$ по подгруппе, порожденной целыми точками $(n-1)$-мерной плоскости $L(\Delta)$, проходящей через Δ, $S(\Delta)$ — $(n-1)$-мерный объем Δ в этой плоскости, нормированный тем условием, что базисный параллелепипед решетки $L(\Delta) \cap \mathbf{Z}^n$ имеет $(n-1)$-мерный объем, равный $(n-1)!$. Положим теперь

$$\zeta(\Gamma_+) = \Big[\theta(\Gamma_+)\Big(\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} \theta(\Gamma_i)\Big)^{-1}\Big(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \theta(\Gamma_{i,j})\Big)\ldots\Big]^{(-1)^{k-1}},$$

где $\Gamma_{i,\ldots,p}$ рассматривается как многогранник Ньютона в $\mathbf{R}_{i,\ldots,p}$.

Задача (А. Г. Кушниренко). *Пусть* $\mathscr{L}$ — *категория, объектами которой являются группы, изоморфные* $\mathbf{Z}^k$, $0 \leqslant k < \infty$, *каждая из которых снабжена автоморфизмом, а морфизмами являются эквивариантные гомоморфизмы, коядро которых является объектом* $\mathscr{L}$. *Пусть* f — *сходящийся ряд с изолированной особенностью,* $\psi(f)$ — *классическая монодромия* f, *рассматриваемая как объект* $\mathscr{L}$. *Вычислить класс* $\psi(f)$ *в группе Гротендика* $K_0(\mathscr{L})$ *категории* $\mathscr{L}$.

Автору задачи известен ответ для почти всех $f \in \mathbf{C}\{\Gamma_+\}$ в случае, когда все грани Γ_+ являются симплексами.

Поступило в Правление общества 6 февраля 1976 г.