Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 4, 1977, 56—67.

УДК 513.015.7

МНОГОГРАННИКИ НЬЮТОНА И ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

А. Г. Хованский

В статье рассматривается алгебраическое многообразие X, определенное в пространстве $(C \setminus 0)^n$ невырожденной системой полиномиальных уравнений $f_1 = \ldots = f_k = 0$ с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Общая задача заключается в вычислении дискретных инвариантов многообразия X в терминах многогранников Δ (см. [1]). Здесь проводится подготовка к таким вычислениям.

Пространство $(C \setminus 0)^n$ компактифицируется при помощи вложения в компактное неособое торическое многообразие M^n. По многогранникам Δ подбирается такая компактификация M^n, что замыкание $\overline{X}$ многообразия $X \subset M^n$ будет неособым многообразием, трансверсальным всем орбитам многообразия M^n.

Торическая компактификация $(C \setminus 0)^n \subset M^n$ играет такую же роль, как проективная компактификация $C^n \subset CP^n$ в классическом случае. Торические многообразия хорошо изучены [2], [3]. С ними почти так же просто обращаться, как с проективными пространствами. В следующей публикации геометрия торических многообразий будет применена для вычисления арифметического рода и эйлеровой характеристики многообразия X. Здесь обсуждается связь этой геометрии с элементарной геометрией целочисленных многогранников.

На меня повлияли работы [2] — [8] и общение с В. И. Арнольдом и А. Г. Кушниренко. Особенно я благодарен Д. Н. Бернштейну и Б. Я. Казарновскому за полезные обсуждения и В. Л. Попову за ряд лекций о торических многообразиях.

§ 1. Торические компактификации

В этом параграфе рассказывается в нужной нам форме о гладких компактных торических многообразиях. Доказательства не приводятся — они или содержатся в главе 1 книги [2] или несложно выводятся из нее.

1. Тор, его характеры и однопараметрические. Пространство $(C \setminus 0)^n$ — это n-мерное комплексное пространство C^n с координатами $z = z_1, \ldots, z_n$, из которого выкинуты все координатные плоскости, т. е. $z \in (C \setminus 0)^n$, если $z_1 \neq 0, \ldots, z_n \neq 0$. Пространство $(C \setminus 0)^n$ является алгебраической группой относительно покомпонентного умножения. Такая группа называется *n-мерным тором* и обозначается через T^n. В $(C \setminus 0)^n$ фиксирована система координат z. Группу T^n с фиксированной системой координат будем называть *стандартным тором*.

Рассмотрим группу алгебраических характеров, т. е. алгебраических гомоморфизмов $(C \setminus 0)^n$ в стандартный тор $(C \setminus 0)$ с координатой t,

χ: $(C \setminus 0)^n \to (C \setminus 0)$. Каждый такой характер является мономом, т. е. функцией вида $t = z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$, где α_i — любые целые числа. Будем нумеровать мономы (характеры) при помощи целых векторов $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ фиксированного n-мерного вещественного пространства R^n и использовать краткую запись $z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n} = z^\alpha$.

Рассмотрим группу алгебраических однопараметрических групп, т. е. алгебраических гомоморфизмов λ: $(C \setminus 0) \to (C \setminus 0)^n$. Каждый такой гомоморфизм имеет вид $z_1 = t^{\xi_1}, \ldots, z_n = t^{\xi_n}$, где ξ_i — целые, или кратко $z = t^\xi$, $\xi = \xi_1, \ldots, \xi_n$. Мы нумеруем однопараметрические λ целыми точками ξ фиксированного пространства R^{n*}.

Фиксация системы координат z в $(C \setminus 0)^n$ фиксирует системы координат в R^n и в R^{n*}. Однопараметрические λ_i вида $z_i = t^{\delta_{ij}}$ будем называть *базисными однопараметрическими*.

Между однопараметрическими λ и характерами χ есть естественное скалярное произведение $\langle \chi, \lambda \rangle$, именно, $\langle \chi, \lambda \rangle$ равно степени сквозного гомоморфизма $\chi\lambda$: $(C \setminus 0) \to (C \setminus 0)$. В координатах это произведение имеет стандартный вид $\langle (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\xi_1, \ldots, \xi_n) \rangle = \sum \alpha_i \xi_i$. Поэтому скалярное произведение $\langle \chi, \lambda \rangle$ продолжается на пространства R^n и R^{n*}. С этого момента элементы пространства R^n будем называть векторами, а элементы пространства R^{n*} — ковекторами.

2. Изоморфизмы стандартных торов. Пусть теперь T^n — другой стандартный тор, расположенный в пространстве C_1^n с координатами $u = u_1, \ldots, u_n$, $u \in T^n$ при $u_1 \neq 0, \ldots, u_n \neq 0$.

Рассмотрим алгебраический изоморфизм φ тора T^n в тор $(C \setminus 0)^n$, φ: $T^n \to (C \setminus 0)^n$. В координатах такой изоморфизм запишется формулами $z_i = u_1^{a_{1i}} \cdot \ldots \cdot u_n^{a_{ni}}$, где $A = a_{ij}$ — целочисленная матрица и $|\det A| = 1$. Наоборот, по каждой такой матрице A можно написать изоморфизм φ. С каждым изоморфизмом φ свяжем конус σ в пространстве R^{n*}.

Определение. *Простым конусом* в R^{n*} называется конус σ, состоящий из линейных комбинаций $\sum c_i \xi_i$ ковекторов $\xi_1, \ldots, \xi_n$, с неотрицательными вещественными коэффициентами $c_i \geqslant 0$, если ковекторы ξ_i целочисленны и образуют базис в целочисленной решетке пространства R^{n*}.

Пусть ковекторы ξ_i нумеруют образы $\mu_i = \varphi\lambda_i$ базисных однопараметрических λ_i стандартного тора T^n при изоморфизме φ. Свяжем с изоморфизмом φ простой конус, порожденный ковекторами ξ_i.

Обратно, по простому конусу σ можно восстановить изоморфизм φ: $T^n \to (C \setminus 0)^n$ (с точностью до изоморфизмов $\varkappa : T^n \to T^n$ перенумерации координат). Для этого нужно просто занумеровать минимальные целые ковекторы ξ_i на ребрах конуса σ и составить из них матрицу A. Целые точки ξ конуса σ имеют простой смысл. Эти точки нумеруют в точности такие однопараметрические $\lambda(t)$, вдоль которых остаются ограниченными координатные функции u_i точки $\varphi^{-1} \lambda(t)$ при $t \to 0$. Особую роль играют однопараметрические μ_i, занумерованные ковекторами ξ_i. Вдоль таких однопараметрических $z = \mu_i(t)$ и вдоль их сдвигов $z = z_0 \mu_i(t)$, $z_0 \in (C \setminus 0)^n$, функция u_i пропорциональна t, в то время как остальные функции u_j, $j \neq i$, остаются ненулевыми постоянными.

3. Компактификация, согласованная с изоморфизмами. Пусть задано конечное семейство изоморфизмов φ_m стандартного тора $T^n \subset C_1^n$ в тор $(C \setminus 0)^n$.

Определение. *Пополнением* пространства $(C \setminus 0)^n$, *согласованным с семейством* φ_m, называется такое аналитическое многообразие M^n, содержащее $(C \setminus 0)^n$, что 1) изоморфизмы $\varphi_m : T^n \to (C \setminus 0)^n$ продолжаются до регулярного вложения $\varphi_m : C_1^m \to M^n$, 2) области $U_m = \varphi_m (C_1^n)$ покрывают все M^n *). Компактное пополнение называется *компактификацией*.

С семейством изоморфизмов φ_m согласовано не больше одного пополнения M^n. Часто таких пополнений нет совсем.

Конечный набор простых конусов $\{\sigma_m\}$ называется *допустимым*, если разные конусы пересекаются лишь по граням. Допустимый набор задает *правильное разбиение пространства* R^{n*}, если $\bigcup \sigma_m = R^{n*}$.

Теорема. *Пополнение* M^n, *согласованное с изоморфизмами* φ_m, *существует, если и только если соответствующий набор конусов* $\{\sigma_m\}$ *допустим. Пополнение компактно, если и только если* $\bigcup \sigma_m = R^{n*}$.

Эта теорема дает возможность связать с каждым правильным разбиением пространства R^{n*} компактное многообразие M^n. Опишем его простейшие свойства. В областях U_m отображение $\varphi_m : C_1^n \to M^n$ задает локальную систему координат. Вложение $(C \setminus 0)^n \to M^n$ является бирациональным изоморфизмом. Обратное отображение в координатах области U_m совпадает с рациональным отображением $\varphi_m : C_1^n \to (C \setminus 0)^n$. Действие тора $(C \setminus 0)^n$ самого на себе продолжается на многообразие M^n (поэтому многообразия M^n называются торическими). Под действием тора M^n распадается на конечное число орбит. Области U_m составлены из орбит. При отображении $\varphi_m^{-1}: U_m \to C_1^n$ орбитам соответствуют координатные плоскости в C_1^n, из которых выкинуты меньшие координатные плоскости. Каждая орбита является тором размерности $\leqslant n$. Замыкание каждой орбиты является гладким торическим многообразием той же размерности. Особую роль для нас будут играть орбиты размерности $n - 1$. Существует взаимно однозначное соответствие между орбитами T_α^{n-1} размерности $n - 1$ и минимальными целочисленными ковекторами ξ_α на ребрах правильного разбиения R^{n*}. Замыкания O_α орбит T_α^{n-1} являются трансверсально пересекающимися гиперповерхностями в M^n, $M^n = (C \setminus 0)^n \bigcup\limits_\alpha O_\alpha$. Порядок нуля мероморфной функции $f : M^n \to C$ на O_α равен порядку нуля функции $f (z_0 \mu_\alpha (t))$ в точке $t = 0$. Здесь z_0 — общая точка в $(C \setminus 0)^n$ и μ_α — однопараметрическая, занумерованная ковектором ξ_α.

4. Целочисленные многогранники Δ, их опорные функции l и достаточно полные многообразия M^n. *Целочисленным многогранником* Δ называется выпуклый многогранник в R^n с вершинами в целых точках. На протяжении всей статьи будут встречаться только такие многогранники. *Опорная функция* l_Δ — это функция на R^{n*}, определенная равенством $l_\Delta (\xi) = \min\limits_{x \in \Delta} \langle \xi \cdot x \rangle$. Пусть дан конечный набор многогранников Δ_i. Скажем, что правильное разбиение пространства R^{n*} на простые конусы *достаточно мелко* для набора многогранников, если опорные функции всех многогранников линейны на каждом конусе разбиения. Соответствующее торическое многообразие M^n будем называть *достаточно полным* для многогранников Δ_i. Методами главы 1 книги [2] несложно показать, что *для любого конечного набора многогранников* Δ_i *существует достаточно мелкое разбиение. Более того, это разбиение можно выбрать так, чтобы соответствующее достаточно полное многообразие* M^n *было проективным.*

---

*) Мы часто будем обозначать одной буквой функции и их продолжения и ограничения.

§ 2. Разрешение особенностей

1. Невырожденные системы функций. По каждому многограннику $\Delta \subset R^n$ и ковектору ξ определим многогранник Δ^ξ как грань многогранника Δ, на которой достигает минимума функция $\langle \xi \cdot x \rangle$ (в частности, $\Delta^0 = \Delta$).

Многочленом Лорана $f : (C \setminus 0)^n \to C$ называется конечная линейная комбинация характеров, т. е. $f(z) = \sum c_\alpha z^\alpha$.

Многогранником Ньютона $\Delta(f)$ многочлена Лорана f называется выпуклая оболочка точек $\alpha \in R^n$, для которых $c_\alpha \neq 0$. По каждому многочлену Лорана f и ковектору ξ определим многочлен Лорана f^ξ, $f^\xi = \sum_{\alpha \in \Delta^\xi} c_\alpha z^\alpha$ (в частности, $f^0 = f$).

Определение. Скажем, что *система многочленов Лорана* $f_1, \ldots, f_k$ *невырождена для своих многогранников Ньютона* $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, если для любого ковектора $\xi \in R^{n*}$ выполнено следующее условие (ξ): для любого решения z системы $f_1^\xi = \ldots = f_k^\xi = 0$, лежащего в $(C \setminus 0)^n$, дифференциалы df_i^ξ линейно независимы в касательном пространстве к точке z.

2. Теорема (о разрешении особенностей). *Условие невырожденности выполнено для почти всех систем $f_1, \ldots, f_k$ с многогранниками $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Если выполнено условие невырожденности и многообразие M^n достаточно полно для многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, то замыкание $\overline{X}$ многообразия $X \subset M^n$ будет неособым многообразием, трансверсальным орбитам многообразия M^n.*

Для доказательства нам понадобится одно вспомогательное утверждение. Пусть C_1^n — n-мерное комплексное пространство, C_I — набор его координатных плоскостей (в количестве 2^n штук) и π_I: $C_1^n \to C_I$ — набор проекций.

Утверждение. *Пусть $g : C_1^n \to C^k$ — аналитическое отображение. Свяжем с ним 2^n отображений $g\pi_I : (C \setminus 0)^n \to C^k$. Утверждается, что почти каждая точка $c \in C^k$ будет некритической для всех отображений $g\pi_I$. Для такой точки c многообразие $g^{-1}(c)$ будет неособо в C_1^n и трансверсально всем координатным плоскостям.*

Первая часть утверждения вытекает из леммы Сарда, вторая часть легко проверяется.

Переходим к доказательству теоремы. Пусть $\{\sigma_m\}$ — достаточно мелкое разбиение пространства R^{n*} и M^n — соответствующее ему многообразие. Возьмем некоторый конус разбиения σ_m. Покажем, что условия (ξ) при $\xi \in \sigma_m$ выполнены почти всегда и что их выполнение гарантирует неособость многообразия X и трансверсальность многообразия $\overline{X}$ орбитам, лежащим в карте $U_m \subset M^n$.

Пусть $\tilde{f}_i(u)$ — многочлен Лорана, полученный из $f_i(z)$ после замены $z = \varphi_m(u)$, и $\widetilde{\Delta}_i$ — его многогранник Ньютона. Многогранник $\widetilde{\Delta}_i$ имеет вершину α_i, на которой достигают минимума все координатные функции: это вытекает из условия линейности опорной функции l_{Δ_i} на конусе σ_m. Функция $\tilde{f}_i(u) \cdot u^{-\alpha_i} = \tilde{g}_i(u)$ будет поэтому многочленом с ненулевым свободным членом. Пусть $g_i(u) = \tilde{g}_i(u) - c_i$, где c_i — свободный член многочлена $\tilde{g}_i(u)$. На торе $u_1 \neq 0, \ldots, u_n \neq 0$ система уравнений $\tilde{f}_1 = \ldots = \tilde{f}_k = 0$ записывается в виде $g_i(u) = c_i$. Теорема теперь сводится к вспомогательному утверждению для отображения $g : C_1^n \to C^k$, определенного формулой $c_i = g_i(u)$. Условие (ξ) при $\xi \in \sigma_m$ совпадает с условием некритичности точки c для одного из отображений $g\pi_I : (C \setminus 0)^n \to C^k$.

Замечания. 1. Как видно из теоремы, многообразие X в общем случае неособо. Особенность многообразия X заключается в его некомпактности, и эту особенность мы и разрешаем.

2. Из доказательства видно, что можно добиться невырожденности системы, изменяя коэффициенты только при мономах, соответствующих вершинам многогранников Ньютона.

3. Вырожденные системы имеют вещественную коразмерность не меньше 2. Поэтому от любой невырожденной системы можно непрерывно перейти к любой другой так, чтобы многообразие $\overline{X}$ все время оставалось гладким и трансверсальным орбитам многообразия M^n. Многие инварианты многообразия X при такой деформации не меняются — не меняется, например, его дифференциальный тип и эйлеровы характеристики с коэффициентами в некоторых пучках. *Все инварианты такого рода зависят* поэтому *от многогранников Ньютона* $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ *и не зависят от конкретного выбора невырожденной системы полиномов* $f_1, \ldots, f_k$.

4. Локальное поведение системы функций $f_1, \ldots, f_k$ около точки 0 в C^n определяется в основном частями многогранников Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, обращенными к точке нуль. Эти части называются *диаграммами Ньютона* (подобное определение см. в [9] и [10]). Определение невырожденности непосредственно переносится на системы функций с заданными диаграммами Ньютона. Здесь нужно требовать, чтобы условие (ξ) выполнялось для всех ковекторов ξ с положительными координатами. *Теорема о разрешении особенностей* при помощи подходящего торического многообразия *переносится и на локальный случай.* Здесь нужно достаточно мелко подразбить положительный октант в R^{n*}. Отметим, что тематика многогранников Ньютона началась как раз с локальных задач — с богатого эмпирического материала и гипотез В. И. Арнольда и первых результатов А. Г. Кушниренко.

§ 3. Объекты, связанные с многочленом Лорана f и многогранником Δ при торической компактификации

1. Общие обозначения. Пусть M — компактное аналитическое многообразие и D — его дивизор. С дивизором D связан пучок $\Omega\,\{D\}$ ростков мероморфных функций на M: росток $g \in \Omega\,\{D\}$, если росток $g\,\varphi$ голоморфен, где $\varphi = 0$ — локальное уравнение дивизора D. По дивизору D стандартным способом строится одномерное аналитическое расслоение V. Расслоение V с отмеченным дивизором D будем обозначать через $\{D\}$. Пучок голоморфных сечений расслоения V будем обозначать ΩV. Пучок ростков сечений ΩV и пучок ростков мероморфных функций $\Omega\,\{D\}$ изоморфны. Одномерный класс Чженя $c_1\,V$ расслоения $\{D\}$ реализуется дивизором D (мы обозначаем одной буквой дивизор D и двойственный ему класс двумерных когомологий). Обозначим через K одномерное каноническое расслоение на M. Пучок $\Omega\,\{D\} \otimes K$ ростков сечений расслоения $\{D\} \otimes K$ изоморфен пучку ростков мероморфных дифференциальных форм старшей степени на M с коэффициентами из пучка $\Omega\,\{D\}$.

2. Пусть теперь $f : (C \setminus 0)^n \to C$ — произвольный многочлен Лорана. По f строится многогранник Ньютона $\Delta(f)$ и его опорная функция $l_\Delta : R^{n*} \to R$. Зафиксируем теперь произвольную торическую компактификацию M^n пространства $(C \setminus 0)^n$. Функция f мероморфно продолжается на пространство M^n, так как вложение $(C \setminus 0)^n \to M^n$ является бирациональной эквивалентностью.

В первую очередь нас будет интересовать дивизор D — замыкание в M^n дивизора в $(C \setminus 0)^n$, определенного уравнением $f = 0$, и связанные с ним пучки $\Omega\,\{mD\}$, $\Omega\,\{mD\} \otimes K$.

Определим дивизор D_∞, характеризующий поведение функции f «на бесконечности». Пусть O_α — замыкание в M^n $(n-1)$-мерной орбиты T_α^{n-1}, $M^n = (C \setminus 0)^n \bigcup\limits_\alpha O_\alpha$. Дивизор D_∞ — это сумма гиперповерхностей O_α. Гиперповерхность O_α входит в дивизор D_∞ с кратностью k, если функция f имеет на этой гиперповерхности полюс кратности k, и с кратностью $-k$, если f имеет нуль кратности k.

Дивизоры D и D_∞ линейно эквивалентны. Действительно, дивизор $D - D_\infty$ является дивизором мероморфной функции f. Переход от «криволинейного» дивизора D к «прямолинейному», т. е. составленному из орбит, дивизору D_∞ является основным для дальнейшего.

Так как дивизоры D и D_∞ линейно эквивалентны, им соответствует одно и то же расслоение V. Одномерный класс Чженя расслоения V реализуется дивизором D или дивизором D_∞. Пучок $\Omega\,\{D\}$ изоморфен пучку ΩV и пучку $\Omega\,\{D_\infty\}$.

Пусть ξ_α — ковекторы, соответствующие $(n-1)$-мерным орбитам T_α^{n-1} компактификации M^n, $O_\alpha = \overline{T}_\alpha^{n-1}$ и l — опорная функция многогранника $\Delta\,(f)$.

Утверждение 1. $D_\infty = -\sum l\,(\xi_\alpha)\cdot O_\alpha$.

Утверждение 1 получается из рассмотрения асимптотики функции $f\,(z_0\,\mu_\alpha\,(t))$ при $t \to 0$, где $z_0\,\mu_\alpha$ — сдвинутая однопараметрическая μ_α, соответствующая ковектору ξ_α.

Из утверждения 1 следует, что класс эквивалентности дивизора D зависит лишь от многогранника Ньютона Δ (при фиксированной компактификации M^n) и не зависит от конкретного выбора функции f. Поэтому можно ввести следующие обозначения:

$[\Delta]$ — класс линейно эквивалентных дивизоров D, соответствующих любому многочлену Лорана f с $\Delta\,(f) = \Delta$;

$\{\Delta\}$ — одномерное расслоение, соответствующее классу $[\Delta]$.

Когомологические вычисления удобно проводить с пучком $\Omega\,\{D_\infty\}$, изоморфным пучку $\Omega\,\{D\}$. Дивизор D_∞ составлен из орбит и инвариантен относительно действия тора T^n. Пучок $\Omega\,\{D_\infty\}$ поэтому тоже T^n-инвариантен. С T^n-инвариантными пучками связана *функция порядка j* — кусочно линейная функция на ковекторах ξ. Определение этой функции можно найти в книге [2] на стр. 26—27. Роль функции порядка j состоит в том, что когомологии многообразия M^n с коэффициентами в T^n-инвариантом пучке вычисляются только по функции порядка j. Чисто геометрический алгоритм такого вычисления приведен в книге [2] на стр. 42—43.

Утверждение 2. *На ковекторах ξ_α, соответствующих $(n-1)$-мерным орбитам T_α^{n-1}, функции j и l совпадают, $j\,(\xi_\alpha) = l\,(\xi_\alpha)$. На остальных ковекторах функция j восстанавливается по кусочной линейности, т. е. по линейности внутри каждого конуса разбиения σ_m, соответствующего торическому замыканию M^n.*

Утверждение 2 вытекает из утверждения 1 и из определения функции порядка j. Особенно простой вид утверждение 2 принимает для достаточно полных компактификаций.

Утверждение 2.′ *Если многообразие M^n достаточно полно для многогранника Δ, то функции j и l совпадают.*

3. Сохранение структуры. Описанные сопоставления сохраняют естественные структуры: *произведению многочленов Лорана соответствует сумма дивизоров D, тензорное произведение расслоений V, сумма дивизоров D_∞, сумма функций порядка j, сумма многогранников Ньютона Δ и сумма их опорных функций l.*

Рассмотрим коммутативную полугруппу A_n целочисленных выпуклых многогранников в R^n относительно сложения. В этой полугруппе есть сокращение, т. е. если $\Delta_1 + \Delta = \Delta_2 + \Delta$, то $\Delta_1 = \Delta_2$. Поэтому полугруппу A_n можно расширить до группы $\bar{A}_n$. Отображение $\Delta \to [\Delta]$ является гомоморфизмом полугруппы A_n в группу классов линейно эквивалентных дивизоров на M^n относительно сложения, и отображение $\Delta \to \{\Delta\}$ — гомоморфизмом A_n в группу одномерных векторных расслоений на M^n относительно тензорного умножения. Оба эти отображения доопределяются на группу $\bar{A}_n$. Так, например, определен класс дивизоров $[-\Delta]$ — это класс $-[\Delta]$, и определено расслоение $\{-\Delta\}$ — это $\{\Delta\}^{-1}$.

4. Нам понадобится ряд определений, связанных с выпуклыми целочисленными многогранниками. Пусть Δ — k-мерный целочисленный многогранник, лежащий в n-мерном пространстве R^n. Проведем k-мерную плоскость R^k, в которой лежит многогранник Δ. Точки, предельные как для многогранника, так и для его дополнения $R^k \setminus \Delta$, назовем *граничными* точками многогранника. Остальные точки назовем *внутренними*. Отметим, что для нульмерного многогранника $(\cdot)$ единственная принадлежащая ему точка будет внутренней. Будем говорить, что многогранник Δ_1 строго меньше многогранника Δ_2, и писать $\Delta_1 < \Delta_2$, если все точки многогранника Δ_1 — внутренние для Δ_2. Введем еще обозначения: $T(\Delta)$ — число целых точек, принадлежащих многограннику Δ, $B^+(\Delta)$ — число внутренних целых точек многогранника Δ, $B(\Delta) = (-1)^k B^+(\Delta)$, где $k = \dim \Delta$.

§ 4. Результаты вычисления когомологий и их геометрические следствия

1. Пусть Δ — выпуклый целочисленный многогранник, M^n — торическая компактификация $(C \setminus 0)^n$, достаточно полная для Δ, и K — каноническое расслоение на M^n. Пусть, далее, f — любой многочлен Лорана с многогранником Ньютона Δ и D, D_∞ — соответствующие ему дивизоры.

Утверждение 1.

1. $$\dim H^i(M^n, \{D_\infty\}) = \begin{cases} T(\Delta) \text{ при } i = 0, \\ 0 \text{ при } i > 0. \end{cases}$$

2. *Сечения из $H^0(M^n, \{D_\infty\})$ — это в точности многочлены Лорана P, для которых $\Delta(P) \subseteq \Delta$.*

Утверждение 2.

1. $$\dim H^i(M^n, \{D_\infty\} \otimes K) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq \operatorname{codim} \Delta = n - \dim \Delta, \\ B^+(\Delta) & \text{при } i = \operatorname{codim} \Delta. \end{cases}$$

2. *Для многогранников Δ полной размерности n* ($\operatorname{codim} \Delta = 0$) *сечения из $H^0(M^n, \{D_\infty\} \otimes K)$ — это в точности дифференциальные формы ω вида $\omega = P \cdot \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$ с многочленами Лорана P, для которых $\Delta(P) < \Delta$.*

Утверждения 1 и 2 несложно получаются из геометрического алгоритма вычисления когомологий с коэффициентами в T^n-инвариантном пучке и в пучке его дифференциалов по функции порядка j (см. [2]). В нашем случае речь идет о пучке $\Omega\{D_\infty\}$, пучке его дифференциалов $\Omega\{D_\infty\} \otimes K$ и функции порядка j, равной опорной функции l многогранника Δ.

Нас будут интересовать также пучки $\Omega\{-D_\infty\}$ и $\Omega\{-D_\infty\} \otimes K$. Когомологии с коэффициентами в этих пучках сразу вычисляются из утверждений 1 и 2 по двойственности Серра (см. [8], стр. 153). В нашем случае двойственность Серра выражается в изоморфизмах

$$H^i(M^n, \{-D_\infty\}) \approx H^{n-i}(M^n, \{D_\infty\} \otimes K)$$

и

$$H^i(M^n, \{-D_\infty\} \otimes K) \approx H^{n-i}(M^n, \{D_\infty\}).$$

Замечание. Когомологии $H(M^n, \{-D_\infty\})$ и $H(M^n, \{-D_\infty\} \otimes K)$ можно вычислить и непосредственно по функции порядка — l. Отметим, что *в геометрическом алгоритме вычисления когомологий T^n-инвариантных пучков по функции порядка двойственности Серра соответствует двойственность Александера.*

В приведенных вычислениях содержится полная информация о группах когомологий $H(M^n, \{m\Delta\}) \approx H(M^n, \{mD\}) \approx H(M^n, \{mD_\infty\})$ и $H(M^n, \{m\Delta\} \otimes K) \approx H(M^n, \{mD\} \otimes K) \approx H(M^n, \{mD_\infty\} \otimes K)$ при всех целых m. Запишем нужную нам часть этой информации в нужном виде.

Теорема. 1. *Имеем:*

$$\dim H^i(M^n, \{-\Delta\}) = \dim H^i(M^n, \{-D\}) = \dim H^{n-i}(M^n, \{\Delta\} \otimes K) = \\ = \dim H^{n-i}(M^n, \{D\} \otimes K) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq \dim \Delta, \\ B^+(\Delta) \text{ при } i = \dim \Delta. \end{cases}$$

2. *При* $\dim \Delta = n$ *группа глобальных сечений пучка* $\Omega\{D\} \otimes K$ *состоит из мероморфных дифференциальных форм* ω *вида* $\omega = \frac{P}{f}\frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$ *с многочленом Лорана* P, $\Delta(P) < \Delta$.

3. $\dim H^i(M^n, \{0\}) = \dim H^i(M^n, \{0\} \otimes K) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = 0, \\ 0 \text{ при } i > 0. \end{cases}$

4. $\chi(M^n, \{-\Delta\}) = B(\Delta)$; $\chi(M^n, \{\Delta\}) = T(\Delta)$; $\chi(M^n, \{0\}) = 1$.

Доказательство. Пункт 1 вытекает из утверждения 2 и двойственности Серра. Пункт 2 вытекает из утверждения 2 и явного задания изоморфизма пучков $\Omega\{D_\infty\} \otimes \mathrm{K}$ и $\Omega\{D\} \otimes K$. Пункт 3 — это частный случай п. 1 для тривиального дивизора $\{0\}$. В пункте 4 вычисляются эйлеровы характеристики пучков $\Omega\{\Delta\}$, $\Omega\{-\Delta\}$ и $\Omega\{0\}$. Первая из них получается из утверждения 1. Две других — из пунктов 1 и 3.

2. Следствия из элементарной геометрии

Следствие 1. *Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ — фиксированные целочисленные выпуклые многогранники и $n_1, \ldots, n_k$ — неотрицательные целые числа. Тогда число $T(n_1\Delta_1 + \ldots + n_k\Delta_k)$ целых точек в многограннике $\Delta = n_1\Delta_1 + \ldots + n_k\Delta_k$ полиномиально зависит* от $n_1, \ldots, n_k$.

Доказательство. Пусть M^n — торическая компактификация $(C \setminus 0)^n$, достаточно полная для многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. По теореме (пункт 4)

$$T(n_1\Delta_1 + \ldots + n_k\Delta_k) = \chi(M^n, \{n_1\Delta_1 + \ldots + n_k\Delta_k\}) = \\ = \chi(M^n, \{\Delta_1\}^{n_1} \otimes \ldots \otimes \{\Delta_k\}^{n_k}).$$

По теореме Римана — Роха (см. [8]) эйлерова характеристика пучка сечений одномерного расслоения полиномиально зависит от его класса Чженя (и от классов Чженя многообразия M^n). Осталось заметить, что класс Чженя расслоения $\{\Delta_1\}^{n_1} \otimes \ldots \otimes \{\Delta_k\}^{n_k}$ равняется $n_1[\Delta_1] + \ldots + n_k[\Delta_k]$ и линейно зависит от чисел $n_1, \ldots, n_k$.

Следствие. 2. *В условиях следствия 1 число $B(\Delta)$, равное числу внутренних целых точек многогранника $\Delta = n_1\Delta_1 + \ldots + n_k\Delta_k$, умноженному на $(-1)^{\dim \Delta}$, полиномиально зависит от $n_1, \ldots, n_k$.*

Доказательство. По теореме (пункт 4) $B(\Delta) = \chi(M^n, \{-\Delta_1\}^{n_1} \otimes \ldots \otimes \{-\Delta_k\}^{n_k})$. Теперь следствие 2 вытекает из теоремы Римана — Роха.

Из следствий 1, 2, в частности, вытекает, что для фиксированного многогранника Δ функции $T(m\Delta)$ и $B(m\Delta)$ являются многочленами для целых неотрицательных m. Доопределим эти многочлены $T(m\Delta)$ и $B(m\Delta)$ для любого целого m.

Следствие 3. *Многочлены $T(m\Delta)$ и $B(m\Delta)$ переходят друг в друга при инволюции $m \to -m$, т. е. $T(m\Delta) = B(-m\Delta)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\chi(m)$ целого m, определенную формулой $\chi(m) = \chi(M^n, \{\Delta\}^m)$. По теореме Римана — Роха эта функция — многочлен При $m \geqslant 0$ $\chi(m) = \chi(M^n, \{\Delta\}^m) = T(m\Delta)$. При $m \leqslant 0$ $\chi(m) = \chi(M^n, \{-\Delta\}^{-m}) = B(-m\Delta)$. Следствие доказано. Отметим, что доказательство этого следствия неявно опиралось на двойственность Серра.

Замечание. Утверждения следствий 1—3 не новые (см. [11], а также [12]). Прежние доказательства этих утверждений были геометрическими. Связь с алгеброй (с теоремой Римана — Роха и двойственностью Серра) была неизвестна.

Всесоюзный научно-исследовательский институт системных исследований

Поступила в редакцию 25 марта 1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн Д. Н., Кушниренко А. Г., Хованский А. Г., Многогранники Ньютона, УМН XXXI, вып. 3 (1976), 201—202.
2. Kempf G., Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B., Toroidal Embedding. I, Lecture Notes in Math., № 339, Springer-Verlag, 1972.
3. Ehlers F., Eine Klass komplexer Mannigfaltigkeiten und die Auflösung einiger isolierter Singularitäten, Math. Ann. 218 (1975), 127—157.
4. Кушниренко А. Г., Многогранник Ньютона и число решений системы k уравнений с k неизвестными, УМН XXX, вып. 2 (1975), 302—303.
5. Чеботарев Н. Г., «Многогранник Ньютона» и его роль в современном развитии математики, Собрание сочинений, т. III, М.—Л., изд-во АН СССР, 1950, 47—48.
6. Брюно А. Д., О степенных асимптотиках решений нелинейных систем, препринт ИПМ № 51 за 1973.
7. Брюно А. Д., Элементы нелинейного анализа (конспект лекций), изд-во Самаркандского ун-та, 1973.
8. Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, М., «Мир», 1973.
9. Кушниренко А. Г., Многогранник Ньютона и числа Милнора, Функц. анализ 9, вып. 1 (1975), 74—75.
10. Kouchnirenko A. G., Polyèdres de Newton et nobres de Milnor, Invent. math. 32, № 1, (1976), 1—32.
11. MacMullen P., Metrical and Combinatorial Properties of Conves Polytopes, Proc. Internat. Congress Math., Vancouver, v. 1 (1974), 431—435.
12. Бернштейн Д. Н., Число целых точек в целочисленных многогранниках, Функц. анализ 10, вып. 3 (1975), 72—73.