Функциональный анализ и его приложения,
т. 12, вып. 1, 1978, 51—61.

УДК 513.015.7

МНОГОГРАННИКИ НЬЮТОНА И РОД ПОЛНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

А. Г. Хованский

Эта статья является непосредственным продолжением статьи [1] и использует ее конструкции и обозначения. Здесь продолжается рассмотрение алгебраического многообразия X, определенное в $(C \setminus 0)^n$ невырожденной системой полиномиальных уравнений $f_1 = \ldots = f_k = 0$ с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$.

Пространство $(C \setminus 0)^n$ компактифицируется при помощи вложения в компактное неособое торическое многообразие M^n, $(C \setminus 0)^n \subset M^n$. В [1] по многогранникам Δ подбирается такая компактификация M^n, что замыкание $\overline{X}$ многообразия $X \subset M^n$ будет неособым компактным многообразием, трансверсальным всем орбитам многообразия M^n. Такая компактификация называется *достаточно полной* для многогранников Δ.

Многообразие $\overline{X}$ является полным пересечением в M^n. В [1] приведены результаты вычисления когомологий многообразия M^n с коэффициентами в некоторых T^n-инвариантных пучках с помощью алгоритма из книги [2]. Эти результаты дают нам возможность вычислить арифметический род $\chi(\overline{X})$ многообразия $\overline{X}$ и (если многогранники Δ имеют полную размерность) описать все голоморфные дифференциальные формы на $\overline{X}$.

Вычисление классов Чженя торического многообразия M^n, проведенное в статье [3], дает нам возможность вычислить эйлерову характеристику $E(\overline{X})$ многообразия $\overline{X}$.

Многообразие $\overline{X}$ тесно связано с исходным многообразием X. Рассмотрим, например, голоморфные дифференциальные формы на X, которые голоморфно продолжаются на некоторую компактификацию многообразия X. Запас таких форм не зависит от выбора компактификации. Поэтому достаточно описания голоморфных форм на компактификации $\overline{X}$. Аналогично, $\chi(\overline{X}) = \chi(X)$.

В § 3 вычисляется эйлерова характеристика $E(X)$. Для этого многообразие $\overline{X}$ разрезается орбитами многообразия M^n на части X_i, $E(\overline{X}) = \sum E(X_i)$. Одна из этих частей — многообразие X, другие части — многообразия того же типа, что и X, но уже меньшей размерности.

В § 4 рассматривается многообразие $\widetilde{X}$, определенное в C^n общей системой полиномиальных уравнений $f_1 = \ldots = f_k = 0$ с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Приводятся условия на многогранники Δ, при которых общее многообразие $\widetilde{X}$ будет неособо и трансверсально координатным плоскостям. К таким многообразиям $\widetilde{X}$ применяются предыдущие вычисления.

§ 1. Род полных пересечений

1. Пусть M — компактное аналитическое проективное многообразие. Число $h^{p,0}(M)$ определяется как размерность пространства голоморфных дифференциальных форм на M степени p. *Геометрическим родом* $p(M)$ многообразия M называется число $h^{n,0}(M)$ при $n = \dim M$. *Арифметическим родом* $\chi(M)$ называется число $\chi(M) = \sum (-1)^p h^{p,0}(M)$.

Числа $h^{p,0}(M)$ являются бирациональными инвариантами. Поэтому можно определить числа $h^{p,0}(Y)$, $p(Y)$ и $\chi(Y)$ для особых и некомпактных алгебраических многообразий Y: надо просто положить $h^{p,0}(Y) = h^{p,0}(M)$, где M — компактное аналитическое проективное многообразие, бирационально эквивалентное Y. Для аналитических некомпактных многообразий Y число $h^{p,0}(Y)$ — это размерность пространства голоморфных форм степени p на Y, продолжающихся на компактификации многообразия Y.

Справедливо равенство $h^{p,0}(M) = \dim H^p(M, \{0\})$, *где* $\{0\}$ — *тривиальное расслоение на* M (см. [4], стр. 150—153).

Пусть теперь M_k — полное пересечение, т. е. $M_k = D_1 \cap \ldots \cap D_k$, где $D_1, \ldots, D_k$ — неособые трансверсально пересекающиеся дивизоры на многообразии M. *Род* $\chi(M_k)$ *и числа* $h^{p,0}(M_k)$ *можно вычислять, не спускаясь на многообразие* M_k, *но зная группы когомологий* $H(M, \{-n_1D_1 - \ldots - n_kD_k\})$, $n_i = 0, 1$, *многообразия* M. Напомним как это делается.

2. Точные последовательности. Пусть по-прежнему $D_1, \ldots, D_k$ — трансверсально пересекающиеся неособые дивизоры на M и $M_0 = M$, $M_1 = D_1, \ldots, M_k = D_1 \cap \ldots \cap D_k$ — последовательность подмногообразий. Пусть дивизор D состоит из гиперповерхностей, трансверсально пересекающих друг друга и дивизоры D_i. Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to \Omega(M_{k-1}, \{-D_k - D\}) \xrightarrow{i} \Omega(M_{k-1}, \{-D\}) \xrightarrow{j} \hat{\Omega}(M_k, \{-D\}) \to 0. \quad (1)$$

Здесь $\Omega(M_{k-1}, \{-D_k - D\})$ — пучок ростков регулярных функций на M_{k-1}, обращающихся в нуль на пересечении с дивизором $D_k + D$, $\Omega(M_{k-1}, \{-D\})$ — пучок ростков регулярных функций на M_{k-1}, обращающихся в нуль на пересечении с дивизором D, $\hat{\Omega}(M_k, \{-D\})$ — тривиальное распространение на M_k пучка ростков регулярных функций на M_k, обращающихся в нуль на пересечении D, i — вложение и j — гомоморфизм ограничения функций на подмногообразие M_k. Соответствующая точная последовательность когомологий имеет вид

$$0 \to H^0(M_{k-1}, \{-D_{k-1} - D\}) \to H^0(M_{k-1}, \{-D\}) \to H^0(M_k, \{-D\}) \to \ldots \quad (2)$$

Здесь мы учитываем изоморфизм групп когомологии пучка $\Omega(M_k, \{-D\})$ и его тривиального распространения $\hat{\Omega}(M_k, \{-D\})$.

Как и в [1], через $\chi(M, \{D\})$ будем обозначать эйлерову характеристику пучка сечений одномерного расслоения над M, соответствующего дивизору D.

Утверждение. *Справедливо равенство* $\chi(M_k, \{-D\}) = \chi(M, \{-D\}) - \sum_i \chi(M, \{D - D_i\}) + \sum_{i<j} \chi(M, \{-D - D_i - D_j\}) - \ldots + (-1)^k \chi(M, \{-D - D_1 - \ldots - D_k\})$. *В частности, выбирая в качестве* D *тривиальный дивизор* $D = 0$, *получим формулу для* $\chi(M_k)$.

Доказательство. Эйлерова характеристика пучка равна сумме эйлеровых характеристик подпучка и фактор-пучка. Поэтому в силу точной последовательности (2) имеем

$$\chi(M_k, \{-D\}) = \chi(M_{k-1}, \{-D\}) - \chi(M_{k-1}, \{-D - D_k\}).$$

Утверждение теперь доказывается индукцией по k.

Вычисление чисел $h^{p,0}M_k$ требует более внимательного рассмотрения точной последовательности (2).

Нам будет полезна еще одна точная последовательность (связанная с последовательностью (1) двойственностью Серра)

$$0 \to \Omega(M_{k-1}, \{D\} \otimes K_{k-1}) \xrightarrow{i} \Omega(M_{k-1}, \{D + D_k\} \otimes K_{k-1}) \xrightarrow{j}$$
$$\xrightarrow{j} \hat{\Omega}(M_k, \{D\} \otimes K_k) \to 0. \quad (1')$$

Здесь $\Omega(M_{k-1}, \{D+D_k\}\otimes K_{k-1})$ — пучок ростков мероморфных форм старшей степени на M_{k-1}, имеющих полюс первого порядка на пересечении с дивизором $D+D_k$, $\Omega(M_{k-1}, \{D\}\otimes K_{k-1})$ — такой же пучок для дивизора D и $\hat{\Omega}(M_k, \{D\}\otimes K_k)$ — тривиальное распространение на M_k пучка ростков мероморфных форм старшей степени, имеющих полюс на пересечении с дивизором D. Здесь i — вложение и j — вычет Пуанкаре. Вот соответствующая точная последовательность когомологий:

$$0 \to H^0(M_{k-1}, \{D\}\otimes K_{k-1}) \to H^0(M_{k-1}, \{D+D_k\}\otimes K_{k-1}) \to$$
$$\to H^0(M_k, \{D\}\otimes K_k) \to \dots \quad (2')$$

3. Напомним некоторые обозначения и результаты статьи [1]. Обозначения: $T(\Delta)$ — число целых точек, лежащих в Δ; $B^+(\Delta)$ — число целых точек, внутренних для Δ (в топологии минимального линейного пространства, содержащего Δ); $B(\Delta)$ — число $(-1)^{\dim\Delta}B^+(\Delta)$. Пусть X — многообразие, определенное в $(C\setminus 0)^n$ невырожденной системой уравнений $f_1=\dots=f_k=0$ с многогранниками Ньютона $\Delta_1,\dots,\Delta_k$. Пусть M — проективная торическая компактификация $(C\setminus 0)^n$, достаточно полная для многогранников Δ. По теореме разрешения особенностей (см. § 2 в [1]) замыкание $\overline{X}$ многообразия $X\subset M$ будет неособо и трансверсально орбитам многообразия M. Пусть D_i — дивизоры, соответствующие функциям f_i при этой компактификации (см. § 3 в [1]). Группы когомологии

$$H(M, \{-n_1D_1-\dots-n_kD_k\}) \approx H(M, \{-n_1\Delta_1-\dots-n_k\Delta_k\}),\ n_i\geqslant 0,$$

вычислены в § 4 [1]. В частности, $\chi(M, \{-n_1\Delta_1-\dots-n_k\Delta_k\}) = B(n_1\Delta_1+\dots+n_k\Delta_k)$. Подставляя эти значения в формулу для рода пересечения, получим следующую теорему.

Теорема 1. *Арифметический род $\chi(X)$ многообразия X, определенного в $(C\setminus 0)^n$ невырожденной системой уравнений $f_1=\dots=f_k=0$ с многогранниками Ньютона $\Delta_1,\dots,\Delta_k$, вычисляется по формуле*

$$\chi(X) = 1-\sum B(\Delta_i)+\sum_{i<j} B(\Delta_i+\Delta_j)-\dots+(-1)^k B(\Delta_1+\dots+\Delta_k).$$

При $k=n$ многообразие X состоит из отдельных точек и $\chi(X)$ равняется их числу, т. е. числу решений общей системы уравнений $f_1=\dots=f_k=0$ в $(C\setminus 0)^n$.

Формула рода несколько громоздка, и здесь полезен небольшой формализм.

4. Формализм. Пусть A — коммутативная полугруппа с нулем и F — вещественнозначная функция на A. Нас будет интересовать полугруппа A_n выпуклых целочисленных многогранников на R^n с операцией сложения и функции $T(\Delta)$, $B(\Delta)$ и $V(\Delta)$, где $V(\Delta)$ — объем многогранника Δ. Зафиксируем элемент $h_1\in A$. Функция $L_{h_1}F(x)=F(x+h_1)-F(x)$ называется первой разностью $F(x)$ относительно h_1. Функция $L_{h_1,h_2}F(x)=L_{h_2,h_1}F(x)=F(x+h_1+h_2)-F(x+h_1)-F(x+h_2)+F(x)$ называется второй разностью $F(x)$ относительно h_1, h_2. Продолжая, получим определение k-й разности $L_{h_1,\dots,h_k}F(x)$ функции $F(x)$ относительно $h_1, h_2,\dots,h_k$. В этих обозначениях формула для рода принимает простой вид.

Теорема 1′. $\chi(\overline{X}) = (-1)^k L_{\Delta_1,\dots,\Delta_k}B(\cdot)$. *Здесь $(\cdot)$ обозначает нульмерный многогранник.*

Отметим, что формулу арифметического рода полного пересечения $D_1\cap\dots\cap D_k$ и в общем случае удобно записывать в этих обозначениях. Здесь в качестве полугруппы A нужно рассмотреть группу дивизоров на многообразии M и в качестве функции F — эйлерову характеристику $F(D) = \chi(M, \{-D\})$. Тогда $\chi(D_1 \cap \ldots \cap D_k) = (-1)^k L_{D_1, \ldots, D_k} \chi(M, \{0\})$.

Функцию F назовем *многочленом* (*однородным многочленом*) степени m, если для любых фиксированных $x_1, \ldots, x_k \in A$ и неотрицательных целых $n_1, \ldots, n_k$ функция $F(n_1x_1 + \ldots n_kx_k)$ является многочленом (однородным многочленом) степени m от $n_1, \ldots, n_k$. Функции $T(\Delta)$, $B(\Delta)$ — многочлены степени n (см. [1]), $V(\Delta)$ — однородный многочлен той же степени (см. [5]). Для многочлена степени m $F(px) = p^m F_m(x) + \ldots + F_0(x)$. Несложно видеть, что коэффициенты $F_i(x)$ — однородные многочлены степени i. Будем называть их однородными составляющими многочлена F. *У многочленов $T(\Delta)$ и $(-1)^n B(\Delta)$ однородные составляющие старшей степени n совпадают с $V(\Delta)$*: для многогранников большого размера число целых точек, принадлежащих многограннику, и число целых точек, лежащих внутри многогранника, в первом приближении совпадают с его объемом.

Для многочлена степени n k-я разность будет многочленом степени $n - k$. Для однородного многочлена степени n число $\frac{1}{n!} L_{h_1, \ldots, h_n} F(0)$ называется смешанным значением многочлена F на $h_1, \ldots, h_n$ и обозначается через $F(h_1, \ldots, h_n)$. Нетрудно видеть, что $F(h, \ldots, h) = F(h)$. Для функции объема V число $V(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ называется *смешанным объемом* многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ (см. [5]). Для многочлена степени n число $L_{h_1, \ldots, h_n} F$ зависит только от однородной составляющей степени n. Поэтому

$$L_{\Delta_1, \ldots, \Delta_n}(-1)^n B(\cdot) = L_{\Delta_1, \ldots, \Delta_n} T(\cdot) = n!\, V(\Delta_1, \ldots, \Delta_n).$$

Приходим к следующей теореме.

Теорема. *Индекс пересечения n дивизоров $D_1, \ldots, D_n$, соответствующих многогранникам Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ на достаточно полном торическом многообразии M^n, или число решений в $(C \setminus 0)^n$ невырожденной системы уравнений $f_1 = \ldots = f_n = 0$ с многогранниками $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ равняется*

$$(-1)^n L_{\Delta_1, \ldots, \Delta_n} B(\cdot) = L_{\Delta_1, \ldots, \Delta_n} T(\cdot) = n!\, V(\Delta_1, \ldots, \Delta_n).$$

Замечание. Форма ответа $n!\, V(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ в этой теореме была известна Д. Н. Бернштейну [6] и форма ответа $L_{\Delta_1, \ldots, \Delta_n} T(\cdot)$ — А. Г. Кушниренко [7]. В форме $(-1)^k L_{\Delta_1, \ldots, \Delta_k} B(\cdot)$ ответ имеет смысл и для $k \leqslant n$—это арифметический род полного пересечения *).

5. Исходя из формулы $n!\, V(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ числа решений системы n уравнений, Д. Н. Бернштейн нашел условия на k многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, при которых многообразие X пусто.

Определение. Многогранники $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, лежащие в R^n, называются *зависимыми*, если найдется l-мерная плоскость, $0 \leqslant l \leqslant n$, в которую после параллельного переноса помещается $l + 1$ многогранник из Δ_i.

Утверждение (Д. Н. Бернштейн). *Невырожденная система уравнений $f_1 = \ldots = f_k = 0$ с многогранниками $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ несовместна в $(C \setminus 0)^n$, если и только если многогранники Δ_i зависимы.*

В доказательстве этого утверждения используется такой геометрический факт : смешанный объем многогранников равен нулю, если и только если многогранники зависимы.

*) Оказывается, что ответ в форме $L_{\Delta_1, \ldots, \Delta_k} T(\cdot)$ тоже имеет смысл при $k < n$; это один из родов (некомпактного) полного пересечения.

§ 2. Числа $h^{p,0}$ для полных пересечений

1. Для вычисления чисел $h^{p,0}(M_k)$ нужно внимательнее посмотреть на точную последовательность (2) из § 1. Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, Δ — многогранники Ньютона, M — проективная компактификация $(C \setminus 0)^n$, достаточно полная для этих многогранников, и $D_1, \ldots, D_k$ — соответствующие многогранникам $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ дивизоры общего положения. Пусть дивизор D соответствует многограннику Δ и состоит из гиперповерхностей, трансверсально пересекающих друг друга и дивизоры D_i.

Лемма 1. *Если* $\dim \Delta = n$, *то пучок* $\Omega(M_k, \{-D\})$ *ацикличен во всех размерностях, кроме старшей размерности* $n-k$ *при любом* $k \leqslant n$.

Доказательство. При $k = 0$ это утверждение содержится в [1], § 4. Доказательство будем вести индукцией по k. Так как $\dim \Delta = n$, то $\dim(\Delta_k + \Delta) = n$. Дивизору $D_k + D$ соответствует многогранник $\Delta_k + \Delta$. По индукционному предположению можно считать, что при $i < n-k$

$$H^i(M_{k-1}, \{-D_k - D\}) = H^i(M_{k-1}, \{-D\}) = H^{i+1}(M_{k-1}, \{-D_k - D\}) = 0.$$

Нужный результат получается теперь из точной последовательности (2): $H^i(M_k, \{-D\}) = H^i(M_{k-1}, \{-D\}) = 0$ при $i < n-k$.

Лемма 2. *Если* $\dim \Delta_1 = \ldots = \dim \Delta_k = n$ *и* $\dim \Delta = l$, *то пучок* $\Omega(M_k, \{-D\})$ *ацикличен во всех размерностях, кроме* l*-й и старшей* $n-k$ *при любом* $k \leqslant n$. *Если* $l < n-k$, *то* $\dim H^l(M_k, \{-D\}) = B^+(\Delta)$.

Доказательство. При $k = 0$ это утверждение содержится в [1], § 4. Доказательство будем вести индукцией по k. Так как $\dim \Delta_k = n$, то $\dim(\Delta_k + \Delta) = n$. Поэтому по лемме 1 $H^i(M_{k-1}, \{-D_k - D\}) = H^{i+1}(M_{k-1}, \{-D_k - D\}) = 0$ при $i < n-k$. При $i < n-k$ из точной последовательности (2) получаем, что $H^i(M_k, \{-D\}) \approx H^i(M_{k-1}, \{-D\})$. Это позволяет сделать индукционный шаг.

Пусть многообразие X определено в $(C \setminus 0)^n$ невырожденной системой уравнений $f_1 = \ldots = f_k = 0$ с многогранниками $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ и $\dim \Delta_i = n$. Пусть $\overline{X}$ — замыкание X в достаточно полной проективной торической компактификации.

Теорема. *Многообразие* $\overline{X}$ *связно, т. е.* $h^{0,0}(\overline{X}) = 1$, *и не имеет голоморфных форм промежуточной размерности, т. е.* $h^{p,0}(\overline{X}) = 0$ *при* $1 < p < n-k$. *Геометрический род* $p(\overline{X}) = h^{n-k,0}(\overline{X})$ *вычисляется по формуле*

$$p(\overline{X}) = B^+(\Delta_1 + \ldots + \Delta_k) - \sum_i B^+(\Delta_1 + \ldots + \hat{\Delta}_i + \ldots + \Delta_k) + \ldots + (-1)^{k-1} \sum B^+(\Delta_i).$$

Доказательство. Подставим в лемму 2 тривиальный дивизор D, соответствующий многограннику $(\cdot)$, состоящему из одной точки. Получим $h^{0,0}(\overline{X}) = 1$ и $h^{p,0}(\overline{X}) = 0$ при $0 < p < n-k$. Учитывая формулу для арифметического рода $\chi(\overline{X})$ и предыдущие равенства, получим, что геометрический род $p(\overline{X})$ имеет нужный вид.

2. Явный вид форм старшей степени. Явный вид форм старшей степени на $\overline{X}$ получается из точной последовательности (2′) в § 1 и явного описания группы $H^0(M, \{-D\} \otimes K)$ в § 4 из [1]. Рассмотрим сначала случай гиперповерхности. Пусть X — гиперповерхность в $(C \setminus 0)^n$, определенная невырожденным уравнением $f = 0$ с многогранником Ньютона Δ и $\dim \Delta = n$, $n > 1$. Пусть $\overline{X}$ — замыкание X в достаточно полной проективной компактификации M.

Утверждение. *Геометрический род* $p(\overline{X})$ *равен* $B^+(\Delta)$. *Более того, каждая голоморфная форма* ω *на* $\overline{X}$ — *это вычет Пуанкаре* $\frac{P}{df}\frac{dz_1}{z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{dz_n}{z_n}$ *формы* $\frac{P}{f}\frac{dz_1}{z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{dz_n}{z_n}$, *где* P — *многочлен Лорана и* $\Delta(P)<\Delta$.

Доказательство. Рассмотрим кусок точной последовательности (2′):

$$0\to H^0(M,K)\xrightarrow{i}H^0(M,\{D\}\otimes K)\xrightarrow{j}H^0(M_1,K_1)\to H^1(M,K)\to\ldots$$

По теореме § 4 из [1] $H^0(M,K)=H^1(M,K)=0$ при $n>1$. Поэтому все голоморфные формы на $\overline{X}=M_1$ — это вычеты Пуанкаре форм из $H^0(M,\{D\}\otimes K)$. Теперь можно сослаться на теорему § 4 из [1].

Замечание. Формула $p(X)=p(\overline{X})=B^+(\Delta)$ для геометрического рода гиперповерхности X была открыта Ходжем [8]. Рассуждения Ходжа, однако, недостаточны для доказательства (у него отсутствует главный технический инструмент — теорема о разрешении особенностей [1]). Отметим, что формулу для $p(X)$ можно получить без когомологических вычислений, манипулируя с многогранниками.

Пример *). Пусть $\overline{X}$ — гладкая компактификация кривой X, заданной с $(C\setminus 0)^2$ невырожденным уравнением $P(x,y)=0$ с многоугольником Ньютона Δ. Предположим, что многочлен P не делится на x и y и что многоугольник Δ имеет размерность 2. Тогда $\overline{X}$ — *сфера с ручками, причем число ручек равняется числу внутренних точек многоугольника* Δ. Все регулярные дифференциалы на $\overline{X}$ допускают явную запись. *Если целая точка* (k,l) *лежит внутри многоугольника Ньютона* Δ, *то форма* $\frac{x^k\cdot y^l}{dP}\frac{dx}{x}\wedge\frac{dy}{y}$ *является регулярным дифференциалом на* $\overline{X}$. *Такие дифференциалы независимы, и их линейные комбинации порождают все регулярные дифференциалы на кривой* $\overline{X}$. Формула $p(\overline{X})=B^+(\Delta)$ в случае общего многочлена $P(x,y)$ степени n дает $p(\overline{X})=(n-1)(n-2)/2$, и в гиперэллиптическом случае $y^2=P_n(x)$ дает $p(\overline{X})=(n-1)/2$ при нечетном n и $p(\overline{X})=(n-2)/2$ — при четном. Эти случаи хорошо известны. Отметим, что число целых точек на границе многоугольника Δ тоже имеет простой геометрический смысл: *кривая* X *получается из компактной кривой* $\overline{X}$ *выкалыванием стольких точек, сколько целых точек лежит на границе многоугольника Ньютона.*

Явный вид форм старшей степени можно получить и для полных пересечений. Сформулируем ответ для $k=2$ (считая, что $n>2$). Пусть многообразие X задается в $(C\setminus 0)^n$ невырожденной системой уравнений $f_1=f_2=0$ с многогранниками Δ_1 и Δ_2, причем $\dim\Delta_1=\dim\Delta_2=n$. Тогда *формы вида* $\frac{P}{df_1\wedge df_2}\frac{dz_1}{z_1}\wedge\ldots\frac{dz_n}{z_n}$ *будут регулярны на компактификации* $\overline{X}$ *многообразия* X, *если* $\Delta(P)<\Delta_1+\Delta_2$. Их «число» равняется $B^+(\Delta_1+\Delta_2)$. Однако эти формы зависимы: если многочлен P делится на f_1, т. е. $P=Q_1f_1$, $\Delta(Q_1)<\Delta_2$, или на f_2, т. е. $P=Q_2f_2$, $\Delta(Q_2)<\Delta_1$, то соответствующие формы будут равны нулю. *«Число» таких нулевых форм равняется* $B^+(\Delta_1)+B^+(\Delta_2)$. *Эти соотношения независимы, и других соотношений нет. Окончательно* $p(\overline{X})=B^+(\Delta_1+\Delta_2)-B^+(\Delta_1)-B^+(\Delta_2)$, что согласуется с общей формулой для геометрического рода.

При $k>2$ явно выписываются формы, затем соотношения между ними, затем соотношения между соотношениями, и т. д.

---

*) По-видимому, этот пример составляет содержание малодоступной статьи: Baker H. F., Examples of application of Newton's polygon applied to the theory of singular points of algebraic functions, Trans. Cambridge Phil. Soc. **15** (1893), 403—450.

§ 3. Эйлерова характеристика

Пусть на аналитическом многообразии Y задано N трансверсально пересекающихся гиперповерхностей $V_1, \ldots, V_N$. С этими гиперповерхностями связана стратификация многообразия Y: страт Y_0 наибольшей размерности в этой стратификации — это $Y \setminus \bigcup V_i$, страты Y_i следующей размерности — это $V_i \setminus \bigcup\limits_{i \neq j} V_j$, и т. д. Каждый страт Y_i этой стратификации — это пересечение нескольких поверхностей V_i, из которого выкинуты все более мелкие пересечения поверхностей V_i, $Y = \bigcup Y_I$, $Y_I \bigcap Y_L = \phi$ при $I \neq L$.

Лемма (об аддитивности эйлеровой характеристики). $E(Y) = \sum E(Y_i)$.

Проведем подробное доказательство для случая одной поверхности V ($N = 1$). В этом случае речь идет о стратификации $Y = V \bigcup Y \setminus V$ и о равенстве $E(Y) = E(V) + E(Y \setminus V)$. Обозначим через V_u трубчатую окрестность многообразия V, через $\overline{V}_u$ — ее замыкание и через ∂V_u — ее границу. Многообразие Y представляется в виде суммы замкнутых множеств $\overline{V}_u$ и $Y \setminus \overline{V}_u$, пересекающихся по ∂V_u. Поэтому $E(Y) = E(V_u) + E(Y \setminus V_u) - E(\partial V_u)$. Далее, $E(V_u) = E(V)$ и $E(Y \setminus V_u) = E(Y \setminus V)$. Заметим теперь, что многообразие ∂V_u расслаивается над V со слоем S^1, поэтому $E(\partial V_u) = E(V) \cdot E(S^1) = 0$. Общий случай ($N > 1$) сводится к рассмотренному индукцией по числу гиперповерхностей.

Теорема 1. *Пусть $D_1, \ldots, D_k$ — аналитические гиперповерхности торического многообразия M^n, трансверсальные друг другу и всем орбитам многообразия M^n. Тогда,*

$$E(D_1 \bigcap \ldots \bigcap D_k \bigcap T^n) = \prod D_i (1 + D_i)^{-1}.$$

Правую часть равенства нужно понимать так: в ряду Тейлора в точке 0 аналитической функции $F(x_1, \ldots, x_k) = \prod x_i (1 + x_i)^{-1}$, выбирается однородная составляющая F_n степени n. Число $F(D_1, \ldots, D_k)$ определяется так. Для монома $x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$ степени n, $n_1 + \ldots + n_k = n$, оно равняется индексу пересечения дивизоров $\underbrace{D_1, \ldots, D_1}_{n_1 \text{ раз}}, \ldots, \underbrace{D_k, \ldots, D_k}_{n_k \text{ раз}}$.

Для однородной функции F_n степени n число $F(D_1, \ldots, D_k)$ доопределяется по линейности и для функции F равенством $F(D_1, \ldots, D_k) = F_n(D_1, \ldots, D_k)$.

Доказательство опирается на теорему Эхлера (см. [3]).

Теорема Эхлера. *Класс Чженя $c_m(M^n) \in H^{2m}(M^n)$ гладкого торического многообразия M^n двойственен по Пуанкаре сумме $\sum T_\alpha^{n-m}$ всех орбит T_α^{n-m} размерности $n - m$ в многообразии M^n.* (Орбита T_α^{n-m} — незамкнутое многообразие, однако двойственный класс когомологий вполне определенен, так как $\overline{T}_\alpha^{n-m}$ — гладкое компактное многообразие, а граница $\overline{T}_\alpha^{n-m} \setminus T_\alpha^{n-m}$ имеет меньшую размерность.)

Зная классы Чженя многообразия M^n, можно вычислить [4] *классы Чженя полного пересечения*. Приведем ответ для эйлерова класса

$$E(D_1 \bigcap \ldots \bigcap D_k) = \prod D_i (1 + D_i)^{-1} + \sum_{m > 0} c_m \left[\prod D_i (1 + D_i)^{-1}\right]_{n-m}.$$

Правую часть этой формулы нужно понимать так: выделим в аналитической функции F однородную составляющую F_{n-m} степени $n - m$ и подставим в F_{n-m} вместо $x_1, \ldots, x_k$ многообразия $D_1, \ldots, D_k$. При этом произведение переменных нужно интерпретировать как пересечение многообразий (приведенных, если нужно, в общее положение). Число $c_m\,[\prod D_i\,(1+D_i)^{-1}]_{n-m}$ есть значение класса Чженя c_m на цикле $[\prod D_i\,(1+D_i)^{-1}]_{n-m}$.

В случае торического многообразия M^n, применяя теорему Эхлера, получим

$$E(D_1\cap\ldots\cap D_k)=\prod D_i(1+D_i)^{-1}+\sum_{m>0}\sum_{\alpha}T_\alpha^{n-m}\left[\prod D_i\,(1+D_i)^{-1}\right]_{n-m},\quad (1)$$

где внутреннее суммирование производится по всем $(n-m)$-мерным орбитам T_α^{n-m}. Обозначим через D_i^α пересечение дивизора D_i с орбитой T_α^{n-m}. Дивизоры $D_1^\alpha,\ldots,D_k^\alpha$ в торическом многообразии $\overline{T}_\alpha^{n-m}$ — замыкании орбиты T_α^{n-m} — трансверсальны друг другу и орбитам многообразия $\overline{T}_\alpha^{n-m}$. Видно, что

$$T_\alpha^{n-m}\,[\prod D_i\,(1+D_i)^{-1}]_{n-m}=\prod D_i^\alpha\,(1+D_i^\alpha)^{-1}.$$

Стратифицируем многообразие $D_1\cap\ldots\cap D_k$ пересечениями с орбитами T_α^{n-m} всех размерностей, $m=0,1,\ldots$,

$$D_1\cap\ldots\cap D_k=(D_1\cap\ldots\cap D_k\cap T^n)\cup\bigcup_{m>0}\bigcup_{\alpha}D_1\cap\ldots\cap D_k\cap T_\alpha^{n-m}.$$

Из аддитивности эйлеровой характеристики получаем

$$E(D_1\cap\ldots\cap D_k)=E(D_1\cap\ldots\cap D_k\cap T^n)+\sum_{m>0}\sum_{\alpha}E(D_1\cap\ldots\cap D_k\cap T_\alpha^{n-m}).$$

По индукции можно считать, что при $m>0$

$$E(D_1\cap\ldots\cap D_k\cap T_\alpha^{n-m})=\prod D_i^\alpha(1+D_i^\alpha)^{-1}=T_\alpha^{n-m}\,[\prod D_i\,(1+D_i)^{-1}]_{n-m}.$$

Окончательно

$$E(D_1\cap\ldots\cap D_k)=E(D_1\cap\ldots\cap D_k\cap T^n)+\sum_{m>0}\sum_{\alpha}T_\alpha^{n-m}\,[\prod D_i\,(1+D_i)^{-1}]_{n-m}.\quad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что $E(D_1\cap\ldots\cap D_k\cap T^n)=\prod D_i\,(1+D_i)^{-1}$. Теорема 1 доказана.

В теореме 1 *не так важно, чтобы* M^n *было торическим многообразием.* Пусть M^n — компактное аналитическое многообразие и $O_1,\ldots,O_N$ — его трансверсально пересекающиеся дивизоры. Допустим, что касательное расслоение TM^n имеет те же классы Чженя, что и расслоение $\{O_1\}+\ldots+\{O_N\}$. По теореме Эхлера именно так обстоит дело, если M^n — торическое многообразие и $O_1,\ldots,O_N$ — замыкания его $(n-1)$-мерных орбит. Пусть $D_1,\ldots,D_k$ — гладкие дивизоры, трансверсальные друг к другу и к дивизорам $O_1,\ldots,O_N$. Обозначим через X часть пересечения $D_1\cap\ldots\cap D_k$, попавшую в «конечную часть» многообразия M^n, т. е. $X=D_1\cap\ldots\cap D_k\setminus\bigcup O_\alpha$. Тогда эйлерова характеристика X выражается только через индексы пересечения дивизоров D_i.

Т е о р е м а 1′. $E(X)=\prod D_i\,(1+D_i)^{-1}$.

Доказательство теоремы 1′ почти дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Нам понадобится небольшой формализм. Пусть $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ — n многогранников в n-мерном пространстве. Смешанный объем этих многогранников по-прежнему будем обозначать через $V(\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$. Пусть теперь $F(x_1, \ldots, x_k)$ — ряд Тейлора аналитической функции от k переменных $x_1, \ldots, x_k$ в точке 0. Мы хотим определить число $F(\Delta_1, \ldots, \Delta_k)$. Если F есть моном степени n, $x = x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}$, $n_1 + \ldots + n_k = n$, то положим

$$F(\Delta_1, \ldots, \Delta_k) = n!\, V(\underbrace{\Delta_1, \ldots, \Delta_1}_{n_1 \text{ раз}}, \ldots, \underbrace{\Delta_k, \ldots, \Delta_k}_{n_k \text{ раз}}).$$

Для однородных функций F_n степени n доопределим число $F(\Delta_1, \ldots, \Delta_k)$ по линейности, для любых — равенством $F(\Delta_1, \ldots, \Delta_k) = F_n(\Delta_1, \ldots, \Delta_k)$, где F_n — однородная составляющая функции F степени n.

Теорема 2. *Пусть X — многообразие, определенное в $(C \setminus 0)^n$ невырожденной системой уравнений $f_1 = \ldots = f_k = 0$ с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Тогда $E(X) = \prod \Delta_i (1 + \Delta_i)^{-1}$. Например, для гиперповерхности ($k = 1$) $E(X) = (-1)^{n-1} n!\, V(\Delta_1)$ и для кривой ($k = n - 1$) $E(X) = -n!\; V(\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}, \Delta_1 + \ldots + \Delta_{n-1})$.*

Доказательство. Теорема о разрешении особенностей (см. [1]) сводит теорему 2 к теореме 1, так как индекс пересечения дивизоров в нашем случае нужным образом выражается через смешанный объем Минковского (см. § 1, п. 4).

Замечание. Теорема 2 не новая. Она была недавно анонсирована Д. Н. Бернштейном (см. [9], где также отражена история вопроса). Его доказательство основано на теории Морса. Оно более элементарно, но наше лучше объясняет вид формулы для $E(X)$.

§ 4. Полные пересечения в C^n

1. Рассмотрим многообразие $\tilde{X}$, определенное в C^n невырожденной системой полиномиальных уравнений $f_1 = \ldots = f_k = 0$ с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Предположим сначала, что все многочлены f_i имеют ненулевой свободный член или, другими словами, что все многогранники Δ_i содержит точку нуль. Введем некоторые обозначения. Обозначим через R_I координатные плоскости в пространстве R^n, $R_\varnothing = R^n$. Обозначим через Δ_i^I пересечение $R_I \cap \Delta_i$, $\Delta_i^\varnothing = \Delta_i$. Число $\prod\limits_i \Delta_i^I (1 + \Delta_i^I)^{-1}$ определяется как результат подстановки многогранников Δ_i^I в аналитическую функцию $\prod x_i (1 + x_i)^{-1}$. При этом учитываются только мономы степени $\dim R_I$. Они интерпретируются при помощи смешанных объемов соответствующих многогранников Δ_i^I в R^n (см. § 3).

Теорема. *Пусть система многочленов $f_1, \ldots, f_k$ невырожденная (см. [1]) для многогранников Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, и все f_i имеют ненулевой свободный член. Тогда:*

1. *Многообразие $\tilde{X}$ гладко и трансверсально всем координатным плоскостям пространства C^n.*

2. *Многообразие $\tilde{X}$ бирационально эквивалентно своей части X, лежащей в $(C \setminus 0)^n$. В частности, $h^{p,0}(\tilde{X}) = h^{p,0}(X)$ и $\chi(\tilde{X}) = \chi(X) = (-1)^k \cdot L_{\Delta_1, \ldots, \Delta_k} B(\cdot)$.*

3. $E(\tilde{X}) = \sum\limits_I \prod\limits_i \Delta_i^I (1 + \Delta_i^I)^{-1}$.

Доказательство. Пункт 1 непосредственно вытекает из условий невырожденности системы f_i (см. [1]). Вложение $(C \setminus 0)^n \to C^n$ является бирациональным изоморфизмом. Вложение $X \to \tilde{X}$ тоже является бирациональным изоморфизмом, так как по пункту 1 многообразие $\tilde{X}$ не содержит неприводимых компонент в координатных плоскостях. Далее, многообразие $\tilde{X}$ стратифицируется пересечениями с координатными плоскостями. Согласно пункту 1 эта стратификация удовлетворяет условиям леммы об аддитивности эйлеровой характеристики. Осталось воспользоваться теоремой 2 из § 3 и просуммировать эйлеровы характеристики $\prod(\Delta_i^I(1+\Delta_i^I)^{-1}$ всех стратов. Теорема доказана.

2. Ослабим теперь условие на многогранники Ньютона Δ_i. Совсем отбросить это условие нельзя: если все многогранники Δ_i расположены далеко от нулевой точки, то в точке 0 пространства C^n все функции f_i будут обращаться в нуль с большой кратностью и точка 0 будет очень особой для $\widetilde{X}$ (но если хотя бы один многочлен f_i имеет свободный член, то точка 0 не лежит в $\widetilde{X}$ и высокая кратность нуля остальных функций в этой точке не играет никакой роли).

Введем некоторые определения. Скажем, что координатная плоскость R_I *привязана* к многогранникам Δ_i, если не все многогранники $\Delta_i^I = R_I \cap \Delta_i$ пусты; привязанную плоскость назовем *слабо привязанной*, если среди Δ_i^I есть пустые, и *сильно привязанной* в противном случае. Скажем, что система многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ *правильно привязана* к координатному кресту, если все координатные плоскости привязаны к многогранникам Δ_i и для каждой слабо привязанной плоскости R_I многогранники Δ_i^I зависимы.

Утверждение 1. *Если общее многообразие $\widetilde{X}$ с многогранниками $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ трансверсально всем координатным плоскостям, то многогранники Δ_i правильно привязаны к координатному кресту в R^n.*

Действительно, если хотя бы одна из функций f_i обращается в тождественный нуль на координатной плоскости C_I, то трансверсальность $\widetilde{X}$ с C_I означает отсутствие точек пересечения. По условию Бернштейна (§ 1, п. 5) это в общей ситуации означает, что непустые из многогранников Δ_i^I зависимы.

Утверждение 2. *Пусть многогранники $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ правильно привязаны к координатному кресту. Пусть, далее,* 0) *функции f_i невырождены для Δ_i* (см. [1]); *I*) *для слабо привязанных плоскостей R_I ненулевые из функций $f_i^I = f_i|_{C_I}$ невырождены для непустых из многогранников Δ_i^I. Тогда многообразие $\widetilde{X}$ неособо и трансверсально всем координатным плоскостям.*

Доказательство. Обозначим через $\overset{0}{C}_I$ координатную плоскость C_I, из которой выкинуты все меньшие координатные плоскости. Если R_I — сильно привязанная плоскость, то трансверсальность $\widetilde{X}$ к $\overset{0}{C}_I$ гарантируется условием 0). Если R_I — слабо привязанная плоскость, то отсутствие точек пересечения $\widetilde{X}$ с $\overset{0}{C}_I$ гарантируется условием *I*).

Все утверждения теоремы 1 *дословно переносятся на системы $f_1 = \ldots = f_k = 0$, для которых многогранники $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ правильно привязаны к координатному кресту и функции $f_1, \ldots, f_k$ удовлетворяют условиям утверждения* 2. (Отметим, что в формуле для эйлеровой характеристики $E(\widetilde{X}) = \sum_I \prod_i \Delta_i^I(1+\Delta_i^I)^{-1}$ суммирование нужно производить только по сильно привязанным плоскостям R_I.)

§ 5. Замечания

1. Часть вычислений этой статьи переносится на локальный случай. Например, формула для арифметического рода гиперповерхности принимает здесь такой вид.

Т е о р е м а. *Род особенности для невырожденной функции f с удобной диаграммой Ньютона* (см. [10]) *равен умноженному на* $(-1)^n$ *числу целых точек с положительными координатами, лежащих на диаграмме Ньютона и под ней.*

2. Мне кажется наиболее привлекательной такая задача: *описать смешанную структуру Ходжа на многообразии X, определенном в* $(C \setminus 0)^n$ *невырожденной системой уравнений* $f_1 = \ldots = f_k = 0$ *с многогранниками Ньютона* $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. *Ту же задачу можно поставить про многообразие* $\widetilde{X}$, *определенное аналогичной системой в* C^n. Здесь естественно ограничиться случаем, когда многочлены f_i имеют свободный член (или случаем, когда многогранники Δ_i правильно привязаны к координатному кресту (см. § 4)). *Эти задачи связаны с описанием полных пересечений в гладких компактных торических многообразиях.* В проективных пространствах полные пересечения хорошо изучены [4]. В проективном случае фактически идет речь об общих системах уравнений со специальными многогранниками Ньютона (симплексами, заданными в R^n неравенствами $x_i \geqslant 0$, $\sum x_i \leqslant m$). В торическом случае не делается ограничений на вид многогранников.

В последнее время мы с В. И. Даниловым решили все перечисленные задачи при некоторых (незначительных) ограничениях на многогранники $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Решение будет изложено в нашей совместной статье, которая сейчас готовится к публикации.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт системных исследований

Поступила в редакцию
25 марта 1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Х о в а н с к и й А. Г., Многогранники Ньютона и торические многообразия, Функц. анализ **11**, вып. 4 (1977), 56—67.
2. K e m p f G., K n u d s e n F., M u m f o r d D., S a i n t - D o n a t B., Toroidal Embeddings. I, Lect. Notes in Math., № 339, Springer-Verlag, 1972.
3. E h l e r s F., Eine Klass komplexer Mannigfaltigkeiten und die Auflösung einiger isolierter Singularitäten, Math. Ann. **218** (1975), 127—157.
4. Х и р ц е б р у х Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, М., «Мир», 1973.
5. Б у з е м а н Г., Выпуклые поверхности, М., «Наука», 1964.
6. Б е р н ш т е й н Д. Н., Число корней системы уравнений, Функц. анализ **9**, вып. 3 (1975), 1—4.
7. К у ш н и р е н к о А. Г., Многогранники Ньютона и теорема Безу, Функц. анализ **10**, вып. 3 (1976), 82—83.
8. H o d g e W. V. D., The isolated singularities of an algebraic surface, Proc. London Math. Soc., Ser 2, **30** (1929), 133—143.
9. Б е р н ш т е й н Д. Н., К у ш н и р е н к о А. Г., Х о в а н с к и й А. Г., Многогранники Ньютона, УМН **XXXI**, вып. 3 (1976), 201—202.
10. К у ш н и р е н к о А. Г., Многогранник Ньютона и числа Милнора, Функц. анализ 9, вып. 1 (1975), 74—75.