Из принципа максимума при любом фиксированном z имеем

$$\max_x |V(x, 1; \hat{\psi}, z)| \leqslant \max_x |\hat{\psi}(x, z)|. \tag{24}$$

Из (24) следует безусловная разрешимость уравнения (23), и так как обратный оператор будет равномерно ограничен относительно z, то отсюда также следует разрешимость уравнения (22).

Использовав безусловную разрешимость уравнений (21) и (22) в соответствующих классах функций (см. ([5])), систему (20) можно свести к одному уравнению относительно $\nu(x, t)$, разрешимость которой будет следовать из единственности.

Институт математики
Сибирского отделения академии наук СССР, Новосибирск

Поступило
7 IX 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] C.D. Pagani, G. Tolenti, Ann. mat. pura ed appl., v. 90, 1 (1971). [2] C.D. Pagani, ibid., Ser. IV, v. 1C (1974). [3] O. Arena, Comm. in Partial Diff. Equations, v. 3 (II), 1007 (1979). [4] *И.Е. Егоров*, Сиб. матем. журн., т. 17, № 1 (1976). [5] *С.А. Терсенов*, Первая краевая задача для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени, Препринт ИМ СО АН СССР, 1978. [6] *Б.А. Бубнов*, Динамика сплошной среды, в. 36, Новосибирск, 1978, стр. 11. [7] *А.А. Дезин*, ДАН, т. 143, № 5 (1963).

УДК 519.675

МАТЕМАТИКА

А.Г. ХОВАНСКИЙ

СПРЯМЛЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КРИВЫХ

(Представлено академиком Л.В. Канторовичем 19 IX 1979)

С каждой кривой Γ на плоскости свяжем двухпараметрическое семейство кривых Γ_q, полученное в результате параллельных переносов кривой Γ на всевозможные векторы $q \in R^2$. Для каких кривых Γ существует (локальный) диффеоморфизм φ на плоскости, под действием которого все кривые Γ_q становятся прямыми линиями? В статье дается ответ на этот вопрос. Одновременно описываются все спрямляющие диффеоморфизмы φ. Тем самым дается решение известной в теоретической номографии проблемы (см. ([1]), стр. 132). В номографических терминах проблема заключается в описании всех преобразований номограмм из выравненных точек в номограммы с ориентированным транспарантом, несущим криволинейный индекс.

Сформулируем результаты.

Т е о р е м а 1. *Семейство кривых Γ_q локально спрямляется, если и только если кривая Γ аффинно эквивалентна одной из следующих пяти кривых*:

1) $e^x + e^y = 1$;
2) $e^x \cos y = 1$;
3) $y = e^x$;
4) $y = x^2$;
5) $y = 0$.

Т е о р е м а 2. *Локальный диффеоморфизм спрямляет некоторое семейство кривых Γ_q, не являющееся семейством прямых, если и только если линейным пре-*

образованием плоскости (x, y) прообраза и проективным преобразованием плоскости (u, v) образа его можно привести к одной из следующих четырех форм:

1) $u = e^x,\ v = e^y$;
2) $u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$;
3) $u = e^x,\ v = ye^x$;
4) $u = x^2 + y,\ v = x$.

Приступим сначала к доказательству теоремы 2. Будем классифицировать локальные диффеоморфизмы $\varphi\colon R_1^2 \to R_2^2$, спрямляющие некоторое семейство кривых Γ_q. Сделаем в плоскости R_1^2 преобразование параллельного переноса на некоторый вектор r. В плоскости R_2^2 параллельному переносу соответствует преобразование π_r, определенное формулой $\pi_r(p) = \varphi[\varphi^{-1}(p) + r]$.

Лемма 1. *Если кривая Γ не является отрезком прямой, то преобразование $\pi_r\colon R_2^2 \to R_2^2$ обязательно проективно.*

Действительно, из определения видно, что преобразование π_r переводит двухпараметрическое семейство прямых $\varphi\Gamma_q$ в себя (более точно: π_r переводит прямую $\varphi\Gamma_q$ в прямую $\varphi\Gamma_{q+r}$). Скажем, что семейство прямых L представительно в области U, если для каждой точки $p \in U$ можно указать прямую $l(p) \in L$ и угол $\alpha(p) > 0$, непрерывно зависящие от точки p, такие, что семейство L содержит все прямые, проходящие через точку p и составляющие с прямой $l(p)$ угол, не больший $\alpha(p)$. Нам понадобится следующая

Лемма 2. *Пусть π – гомеоморфизм связной области U_1 в область U_2. Если гомеоморфизм π переводит прямые из некоторого представительного для U_1 семейства прямых L в прямые области U_2, то преобразование π проективно.*

Приведем набросок доказательства леммы 2. Хорошо известно, что гомеоморфизм, переводящий все прямые в прямые, является проективным преобразованием. Доказательство этого факта основано на построении всюду плотной сети Мёбиуса (см. [2], стр. 153). Доказательство леммы 2 основано на тех же соображениях. В окрестности каждой точки $p \in U_1$ можно построить плотную сеть Мёбиуса, все прямые которой лежат в семействе L. Это построение доказывает, что отображение π локально проективно. Проективность отображения π вытекает теперь из связности области U_1.

Лемма 1 вытекает из леммы 2. Действительно, легко видеть, что если кривая Γ не прямолинейна, то семейство прямых $\varphi\Gamma_q$ представительно.

Продолжим доказательство теоремы 2. Соответствующие сдвигам преобразования $\pi_r\colon R_2^2 \to R_2^2$ образуют локальную коммутативную группу преобразований плоскости R_2^2. Эта группа локально транзитивна, т.е. имеет двухмерную орбиту. Лемма 1 редуцирует исходную задачу к задаче описания всех коммутативных двухмерных групп проективных преобразований плоскости.

Локальной группе проективных преобразований плоскости соответствует локальная группа линейных преобразований пространства с определителем, равным единице. Добавляя к алгебре этой группы матрицы λE, приходим к задаче классификации трехмерных коммутативных алгебр Ли, действующих в R^3.

Лемма 3. *Каждая трехмерная коммутативная подалгебра алгебры Ли линейных преобразований R^3 заменой базиса приводится к одной из следующих шести форм:*

$$1)\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & b \end{pmatrix};$$

$$4)\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix};\quad 5)\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix};\quad 6)\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}.$$

В каждой из этих форм параметры a, b и c обозначают произвольные вещественные числа.

Полное доказательство этой леммы основано на несложных вычислениях и здесь не приводится. В доказательстве используется одно общее соображение. Скажем, что $(n\times n)$-матрица с и л ь в е с т р о в а, если каждому собственному числу соответствует ровно одна жорданова клетка. Несложно показать, что все матрицы, коммутирующие с сильвестровой матрицей, коммутируют между собой и образуют n-мерную коммутативную алгебру. Алгебры 1) – 4) содержат сильвестрову матрицу соответственно: 1) с тремя разными вещественными собственными числами, 2) с одним вещественным и двумя комплексно-сопряженными собственными числами, 3) с одномерной и двумерной жордановыми клетками, 4) с трехмерной жордановой клеткой – и состоят из всех коммутирующих с ними матриц. Алгебры, не содержащие ни одной сильвестровой матрицы, описываются отдельно. Отметим, что коммутативные алгебры преобразований многомерного пространства содержат непрерывные модули и не поддаются обозримой классификации.

Л е м м а 4. *Коммутативная двухпараметрическая группа проективных преобразований плоскости линейной заменой в плоскости параметров* (x, y) *и проективной заменой координат в плоскости* (u, v) *приводится к одной из шести групп G. Преобразование* $\pi(x, y)$ *из группы G переводит точку* (u, v) *соответственно в точку:*

1) $(e^x u, e^y v)$;
2) $e^x(u\cos y - v\sin y,\ u\sin y - v\cos y)$;
3) $e^x(u, yu + v)$;
4) $(u + xv + y + x^2/2,\ v + x)$;
5) $(u + x,\ v + y)$;
6) $(u + xv + y,\ v)$.

Для д о к а з а т е л ь с т в а л е м м ы 4 достаточно проинтегрировать алгебры, указанные в лемме 3, до групп линейных преобразований и рассмотреть соответствующие группы проективных преобразований.

Закончим теперь доказательство теоремы 2. Пусть $\varphi\colon R_1^2 \to R_2^2$ – диффеоморфизм, спрямляющий некоторое непрямолинейное семейство Γ_q. Каждой точке $r \in R_1^2$ соответствует проективное преобразование π_r плоскости R_2^2 такое, что $\varphi(r) = \pi_r \circ \varphi(0)$. Группы преобразований π_r описаны в лемме 4. Теперь для определения преобразования φ нужно лишь зафиксировать точку $\varphi(0)$ в одной из двухмерных орбит одной из групп вида 1) – 6). Для групп вида 1) – 4) отображение φ с точностью до проективного преобразования пространства образа не зависит от выбора двухмерной орбиты и фиксации точки $\varphi(0)$. Соответствующие преобразования φ – диффеоморфизмы 1) – 4) из теоремы 2. Группа вида 6) вообще не имеет двухмерных орбит. Для группы вида 5) преобразование φ – сдвиг. Сдвиг переводит в прямые линии лишь прямые линии. Теорема 2 полностью доказана.

Теорема 1 вытекает из теоремы 2: непрямолинейные кривые Γ со спрямляемыми семействами Γ_q – это прообразы прямых при отображениях 1) – 4), описанных в теореме 2.

З а м е ч а н и е. В условиях теорем 1 и 2 предположения о гладкости кривой Γ и преобразования φ сделаны лишь для удобства изложения: теоремы 1 и 2 справедливы и для непрерывной кривой Γ и гомеоморфизма φ; дело в том, что непрерывные гомеоморфизмы групп Ли автоматически являются гладкими отображениями (см., например, ([3]), стр. 242).

Я признателен Г.С. Хованскому, который заинтересовал меня номографической тематикой.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
системных исследований,
Москва

Поступило
20 IX 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г.С. Хованский*, Основы номографии, М., "Наука", 1976. [2] *Ф. Клейн*, Лекции о развитии математики в XIX столетии, М.–Л., ОНТИ, 1937. [3] *С. Стернберг*, Лекции по дифференциальной геометрии, М., "Мир", 1970.