УДК 512.7

ДАНИЛОВ В. И., ХОВАНСКИЙ А. Г.

МНОГОГРАННИКИ НЬЮТОНА И АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧИСЕЛ ХОДЖА — ДЕЛИНЯ

Введение

Одним из наиболее естественных топологических инвариантов любого многообразия являются его гомологии или когомологии. Начиная с Ходжа, было известно, что когомологии комплексного проективного многообразия обладают естественным разложением Ходжа. Делинь [1], [2] обобщил теорию Ходжа на произвольные комплексные алгебраические многообразия, снабдив их когомологии так называемой смешанной структурой Ходжа. В частности, для любого алгебраического многообразия X определены числа Ходжа — Деліня $h^{p,q}(H^k(X))$ структуры Ходжа $H^k(X)$.

Статья посвящена вычислению этих инвариантов для многообразий X, определенных в пространстве $(\mathbf{C}\setminus 0)^n$ системой полиномиальных уравнений $f_1=\ldots=f_k=0$, невырожденной для своих многогранников Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Напомним, что многогранником Ньютона полинома $f=\sum a_m x^m$, где $m=(m_1, \ldots, m_n)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, называется выпуклая оболочка точек $m\in\mathbf{R}^n$, для которых коэффициент $a_m\neq 0$. Многогранник Ньютона полинома обобщает понятие степени и играет аналогичную роль. Система уравнений с фиксированными многогранниками Ньютона при почти всех значениях коэффициентов невырождена.

Пространство $(\mathbf{C}\setminus 0)^n$ в статье называется n-мерным тором и обозначается через $\mathbf{T}^n$.

Могло бы показаться несколько надуманным, что мы изучаем полные пересечения в торе $\mathbf{T}^n$, а, например, не в аффинном пространстве $\mathbf{C}^n$. Приведем в оправдание два довода. Во-первых, разрезая $\mathbf{C}^n$ координатными плоскостями на торы различных размерностей, можно применить результаты о полных пересечениях в торе к полным пересечениям в $\mathbf{C}^n$. Последний принцип применим не только к пространству $\mathbf{C}^n$, но и к произвольным торическим многообразиям — специальным алгебраическим многообразиям, естественно разбивающимся в объединение непересекающих торов различной размерности. Таким образом, случай тора является ключевым при вычислении чисел Ходжа — Делиня для полных пересечений в торических многообразиях. Во-вторых, случай тора является наиболее простым. Дело в том, что тор $\mathbf{T}^n=(\mathbf{C}\setminus 0)^n$ является коммутативной алгебраической группой (относительно операции покоординатного умножения). Инвариантные пучки на этой группе раскладываются по характерам. Когомологии с коэффициентами в таких пучках вычисляются отдельно для каждого характера группы, что резко упрощает все вычисления.

Вместо когомологий удобнее иметь дело с когомологиями с компактными носителями. Как и обычные когомологии, когомологии с компактными носителями снабжены естественной (смешанной) структурой Ходжа. Двойственность Пуанкаре между когомологиями и компактными когомологиями гладких алгебраических многообразий согласована со структурами Ходжа. Поэтому, переходя к компактным когомологиям, мы ничего не теряем. Удобство же их в следующем. Определим для многообразия X числа

$$e^{p,q}=\sum_k(-1)^k h^{p,q}(H_c^k(X)).$$

Тогда если $X=\bigcup_\alpha X_\alpha$ — разбиение X на конечное число локально замкнутых подмногообразий, то $e^{p,q}(X)=\sum_\alpha e^{p,q}(X_\alpha)$. Тем самым характеристики $e^{p,q}$ ведут себя простейшим мыслимым образом при разбиении многообразия на куски — операции, столь естественной при работе с торическими многообразиями.

Важную роль играют также числа $e^p(X)$, определенные формулой $e^p(X)=\sum_q e^{p,q}(X)$.

Перечислим результаты статьи. Во-первых, для невырожденного полного пересечения X как в торе, так и в любом торическом многообразии, вычислены числа $e^p(X)$ в терминах многогранников Ньютона уравнений, задающих полное пересечение. Во-вторых, для невырожденного полного пересечения X как в торе, так и в любом торическом многообразии, дан конечный алгоритм в терминах многогранников Ньютона для вычисления чисел $e^{p,q}(X)$. В важном частном случае гиперповерхности с простым многогранником Ньютона (многогранник в $\mathbf{R}^n$ называется простым, если в каждой его вершине сходится n граней многогранника) даны явные формулы для чисел $e^{p,q}(X)$. В-третьих, для невырожденного полного пересечения X в компактном торическом многообразии дан алгоритм вычисления чисел Ходжа $h^{p,q}(X)$ (этот результат есть следствие предыдущего, так как для компактных многообразий числа $h^{p,q}$ и $e^{p,q}$ отличаются лишь знаком). В-четвертых, для некомпактного полного пересечения X дан алгоритм вычисления чисел Ходжа в следующих случаях: а) X — полное пересечение в торе и многогранники Ньютона всех уравнений, задающих X, имеют максимальную размерность; б) X — полное пересечение в $\mathbf{C}^n$ и многогранники Ньютона всех уравнений, задающих X, содержат начало координат и пересекаются со всеми координатными осями. (Этот результат есть следствие вычисления чисел $e^{p,q}(X)$ и аналога теоремы Лефшеца.)

Несколько слов о разделении труда. Первому автору принадлежат вычисление торических когомологий (предложение 2.10) и перенесение известных результатов о структурах Ходжа на случай компактных когомологий (использование форм с «логарифмическими полюсами»; предложение 1.12). Второму автору принадлежит введение аддитивного инварианта $e^{p,q}$ алгебраических многообразий, а также его применения (следствие 2.5; алгоритм из § 5).

Настоящая статья была написана в 1978 г., но не была сдана в печать. Ее результаты используются в опубликованной работе [5] первого автора и в готовящейся к публикации работе второго автора (в которой алгоритмы из настоящей статьи доведены до явных формул).

§ 1. Теория Ходжа — Деліня

В этом параграфе мы напомним теорию Ходжа — Делиня алгебраических многообразий над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$, делая упор на когомологии с компактными носителями. Центральным здесь является понятие характеристики $e^{p,q}(X)$ алгебраического многообразия X.

1.1. Пусть H — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел. *Чистой структурой Ходжа веса* r на H называется прямое разложение комплексного векторного пространства

$$H_{\mathbf{C}} = H \otimes \mathbf{C} = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}$$

такое, что $H^{p,q} = \overline{H}^{q,p}$ (черта сверху обозначает здесь комплексное сопряжение в $H_{\mathbf{C}}$). Введение этого понятия мотивируется классической теорией Ходжа, согласно которой r-мерные когомологии $H^r(X, \mathbf{Q})$ компактного келерова многообразия X обладают естественной структурой Ходжа веса r. Размерность векторного $\mathbf{C}$-пространства $H^{p,q}$ называется *числом Ходжа типа* (p, q) *структуры* H и обозначается $h^{p,q}(H)$.

Задание структуры Ходжа веса r на H определяет так называемую *фильтрацию Ходжа* F на $H_{\mathbf{C}}$, где

$$F^p = \bigoplus_{s \geqslant p} H^{s,r-s}.$$

Эта фильтрация убывающая, и для любого целого p выполняется

$$H_{\mathbf{C}} = F^p \oplus \overline{F}^{r-p+1}.$$

Обратно, если на $H_{\mathbf{C}}$ задана убывающая фильтрация F, удовлетворяющая предыдущему соотношению, то, полагая $H^{p,q} = F^p \cap \overline{F}^q$, мы получаем чистую структуру Ходжа веса r на $H_{\mathbf{C}}$.

1.2. Снова пусть H — векторное пространство над $\mathbf{Q}$. *Структурой Ходжа* (смешанной) *на* H называется задание а) возрастающей весовой фильтрации W на H, б) убывающей фильтрации Ходжа F на $H_{\mathbf{C}}$, которые должны быть связаны соотношением: фильтрация F на комплексификации $G_r{}^W H = W_r / W_{r-1}$ дает чистую структуру Ходжа веса r. В частности, для каждого r имеется разложение

$$(G_r^W H)_{\mathbf{C}} = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}.$$

Размерность $\mathbf{C}$-пространства $H^{p,q}$ называется *числом Ходжа типа* (p, q) *структуры Ходжа* H и обозначается $h^{p,q}(H)$.

1.3. Пусть H и H' — $\mathbf{Q}$-пространства, снабженные структурой Ходжа. $\mathbf{Q}$-линейный гомоморфизм $f\colon H \to H'$ называется *согласованным со структурами Ходжа* (или морфизмом структур Ходжа), если f согласован с фильтрациями W и F, т. е. если $f(W_r) \subset W_r{}'$ и $f_{\mathbf{C}}(F^p) \subset F'^p$.

Морфизмы структур Ходжа строго согласованы с фильтрациями W и F (см. [1]). Отсюда следует точность функтора $H^{p,q}$. Иначе говоря, если $H' \to H \to H''$ — точная последовательность структур Ходжа, то для любого (p, q) точна последовательность $H'^{p,q} \to H^{p,q} \to H''^{p,q}$.

1.4. Как показал Делинь [2], когомологии $H^k(X, \mathbf{Q})$ любого комплексного алгебраического многообразия X обладают естественной структурой Ходжа, совпадающей с классической (чистой) структурой Ходжа в случае гладких проективных многообразий. Нам удобнее будет, однако, пользоваться когомологиями с компактными носителями $H_c^k(X, \mathbf{Q})$. Они также обладают естественной структурой Ходжа. Ниже мы перечислим основные свойства теории Ходжа компактных когомологий гладких некомпактных алгебраических многообразий:

а) *Если $f\colon X\to Y$ — собственный морфизм, то гомоморфизм $f^*\colon H_c^*(Y)\to H_c^*(X)$ согласован со структурой Ходжа.*

б) *Изоморфизм Кюннета $H^*(X)\otimes H^*(Y)\to H_c^*(X\times Y)$ согласован со структурами Ходжа, где слева стоит тензорное произведение структур Ходжа.*

в) *Если Y — замкнутое подмногообразие в X, то точная последовательность*

$$\ldots\to H_c^k(X\setminus Y)\to H_c^k(X)\to H_c^k(Y)\to H_c^{k+1}(X\setminus Y)\to\ldots$$

является последовательностью структур Ходжа.

г) *Числа Ходжа $h^{p,q}(H_c^k(X))$ равны 0 при $p+q>k$ (также при $p<0$ или $q<0$).*

Эти четыре свойства верны для любых алгебраических многообразий, но наиболее просто они доказываются для гладких многообразий и применяться будут лишь в этом случае. Для двух других свойств гладкость существенна.

д) *Если X — гладкое проективное многообразие, то структура Ходжа на $H_c^*(X)=H^*(X)$ совпадает с классической.*

е) *Пусть X — гладкое неприводимое n-мерное многообразие. Тогда спаривание Пуанкаре*

$$H_c^k(X)\otimes H^{2n-k}(X)\to H_c^{2n}(X)=\mathbf{Q}\,[-n]$$

согласовано со структурой Ходжа в компактных и обычных когомологиях.

На самом деле последнее свойство остается верным, если гладкость многообразия X заменить квазигладкостью (см. [3]). В частности,

ж) *для компактного квазигладкого алгебраического многообразия X структура Ходжа на $H^k(X)$ — чистая веса k.*

1.5. Обобщая понятие эйлеровой характеристики, мы для каждой пары (p, q) целых чисел вводим следующий инвариант алгебраического многообразия X:

$$e^{p,q}(X)=\sum_k(-1)^k h^{p,q}(H_c^k(X)).$$

Отметим, что $e^{p,q}(X)=e^{q,p}(X)$. Для компактного гладкого (или квазигладкого) многообразия X

$$e^{p,q}(X)=(-1)^{p+q}h^{p,q}(X),$$

где $h^{p,q}(X)$ — числа Ходжа X. Так что в этом случае знание чисел $e^{p,q}(X)$ эквивалентно знанию чисел Ходжа и, в частности, позволяет находить числа Бетти X.

Характеристики $e^{p,q}(X)$ удобно свести в один многочлен $e(X)$ от переменных x и $\bar{x}$:

$$e(X; x, \bar{x})=\sum_{p,q}e^{p,q}(X)\,x^p\bar{x}^q.$$

Главной причиной введения характеристики e является следующее свойство аддитивности.

1.6. Предложение. *Предположим, что многообразие X является непересекающимся объединением конечного числа локально замкнутых подмногообразий X_i, $i \in I$. Тогда* $e(X) = \sum_{i \in I} e(X_i)$.

Доказательство мы дадим лишь для случая, когда X и все X_i являются гладкими. Кроме того, мы будем считать, что наше разбиение $(X_i)_{i \in I}$ удовлетворяет следующему свойству: замыкание $\overline{X}_i$ любого страта X_i является объединением некоторых X_j. В этом случае найдется $i \in I$ такое, что X_i замкнуто в X. Используя 1.4 в) и точность $H^{p,q}$ (см. 1.3), мы получаем для каждого (p, q) равенство

$$e^{p,q}(X) = e^{p,q}(X \setminus X_i) + e^{p,q}(X_i).$$

Остается перейти от X к $X \setminus X_i$. Общий случай сводится к рассмотренному подходящим измельчением разбиения $(X_i)_{i \in I}$.

1.7. Следствие. *Пусть (X_i) — конечное покрытие X локально замкнутыми подмногообразиями. Тогда*

$$e(X) = \sum_{i_0 < \ldots < i_k} (-1)^k e(X_{i_0} \cap \ldots \cap X_{i_k}).$$

Другое удобное свойство характеристики e — мультипликативность — следует из 1.4 б).

1.8. Предложение. $e(X \times Y) = e(X) \times e(Y)$.

1.9. Следствие. *Пусть f: $X \to Y$ — локально тривиальное в топологии Зариского расслоение со слоем F. Тогда*

$$e(X) = e(Y) \times e(F).$$

В самом деле, пусть (Y_i) — открытое покрытие Y, тривиализирующее f. Теперь надо применить 1.7 к покрытию $(f^{-1}(Y_i))$ многообразия X, затем 1.8 — к $f^{-1}(Y_{i_0}) \cap \ldots \cap f^{-1}(Y_{i_k}) = (Y_{i_0} \cap \ldots \cap Y_{i_k}) \times F$ и снова 1.7 — к покрытию (Y_i).

1.10. Покажем на элементарных примерах использование характеристики e. Прежде всего:

а) если X состоит из одной точки, то $e(X) = 1$.

б) Пусть $X = \mathbf{P}^1$ — сфера Римана. Тогда $e(\mathbf{P}^1) = 1 + x\bar{x}$.

в) Представляя $\mathbf{C}$ как разность $\mathbf{P}^1$ и точки ∞, мы получаем $e(\mathbf{C}) = x\bar{x}$. Вообще, $e(\mathbf{C}^n) = (x\bar{x})^n$.

г) Разбивая проективное пространство $\mathbf{P}^n$ на $\mathbf{C}^n$ и бесконечно удаленную гиперплоскость $\mathbf{P}^{n-1}$, мы получаем:

$$e(\mathbf{P}^n) = 1 + x\bar{x} + \ldots + (x\bar{x})^n.$$

д) Для одномерного тора $\mathbf{T}^1 = \mathbf{C} \setminus 0$ имеем $e(\mathbf{T}^1) = x\bar{x} - 1$. Вообще, для n-мерного тора $\mathbf{T}^n = (\mathbf{T}^1)^n$

$$e(\mathbf{T}^n) = (x\bar{x} - 1)^n.$$

На самом деле для тора без труда можно найти все числа Ходжа — Делиня; все они нулевые, кроме $h^{p,p}(H_c^{n+p}(\mathbf{T}^n)) = C_n^p$, где C_n^p — число сочетаний из n по p.

е) Приведем менее элементарный пример. Пусть Y — гладкое подмногообразие коразмерности $r+1$ в гладком многообразии X. Пусть ρ: $\tilde{X} \to X$ — раздутие в X подмногообразия Y. Тогда $\rho^{-1}(Y)$ — расслоение над Y со слоем $\mathbf{P}^r$, откуда

$$e(\tilde{X}) = e(X) + e(Y)[x\bar{x} + \ldots + (x\bar{x})^r].$$

В частности, для чисел Бетти b^k имеем

$$b^k(\bar{X}) = b^k(X) + b^{k-2}(Y) + \ldots + b^{k-2r}(Y).$$

1.11. Предыдущие свойства аддитивности и мультипликативности приводят к вычислению $e(X)$ лишь для очень простых многообразий X; в более сложных случаях надо делать что-то менее тривиальное. В нашем случае конечный успех связан с тем, что удается сосчитать (для гиперповерхности в торе) суммы $\sum\limits_q e^{p,q}(X)$, интерпретируя их как когомологии некоторых когерентных пучков. Скажем об этом подробнее.

Пусть X — гладкое алгебраическое многообразие. Пусть $\bar{X}$ — такая гладкая компактификация X, что дивизор $D = \bar{X} \setminus X$ на $\bar{X}$ имеет трансверсальные пересечения. Обозначим через $\Omega^p_{(\bar{X},D)}$ пучок ростков регулярных дифференциальных p-форм на $\bar{X}$, которые равны нулю при ограничении на D. Более точно, если $D_1, \ldots, D_N$ — неприводимые компоненты D, то $\Omega^p_{(\bar{X},D)}$ — это ядро гомоморфизма ограничения $\Omega^p_{\bar{X}} \to \bigoplus\limits_i \Omega^p_{D_i}$.

Справедливо следующее

1.12. Предложение. *Существует спектральная последовательность*

$$E_1^{p,q} = H^q(\bar{X}, \Omega^p_{(\bar{X},D)}) \Rightarrow H_c^{p+q}(X, \mathbf{C}),$$

вырождающаяся в члене E_1 и сходящаяся к фильтрации Ходжа F на $H_c^*(X)$.

В случае компактного X эта спектральная последовательность превращается в спектральную последовательность Ходжа — де Рама. В общем случае мы получаем, что пространство $H^{k-p}(\bar{X}, \Omega^p_{(\bar{X},D)})$ изоморфно пространству $F^p H_c^k(X)/F^{p+1} H_c^k(X)$, размерность которого равна $\sum\limits_q h^{p,q}(H_c^k(X))$. Если обозначить через $\chi(\bar{X}, \mathfrak{F})$ характеристику Эйлера — Пуанкаре пучка $\mathfrak{F}$ на $\bar{X}$, т. е. $\sum\limits_k (-1)^k \dim H^k(\bar{X}, \mathfrak{F})$, то мы получаем

1.13. Следствие. *В предыдущих обозначениях и предположениях*

$$e^p(X) = \sum_q e^{p,q}(X) = (-1)^p \chi(\bar{X}, \Omega^p_{(\bar{X},D)}).$$

§ 2. Торические многообразия

Здесь мы напоминаем кратко строение торических многообразий той сцены, на которой будет разыгрываться наш сценарий. Как уже говорилось, торические многообразия — это специальные частичные компактификации торов. С напоминания о торах мы и начнем.

2.1. *Тором* (а точнее, *n-мерным тором*) называется алгебраическое многообразие $\mathbf{T}^n$, изоморфное $(\mathbf{C} \setminus 0)^n$. Если x_i — координата на i-м сомножителе $\mathbf{C} \setminus 0$, то для каждого $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{Z}^n$ моном $x^m = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ является регулярной функцией на $\mathbf{T}^n$ (и даже гомоморфизмом групп $\mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^1$). Более того, любая регулярная функция f на $\mathbf{T}^n$ однозначно записывается как конечная линейная комбинация мономов x^m, $m \in \mathbf{Z}^n$. Иначе говоря, кольцо $\mathbf{C}[\mathbf{T}^n]$ регулярных функций на $\mathbf{T}^n$ изоморфно групповой алгебре $\mathbf{C}[\mathbf{Z}^n]$ абелевой группы $\mathbf{Z}^n$, а $\mathbf{T}^n =$

$=\operatorname{Spec} \mathbf{C}[\mathbf{Z}^n]$ — спектр этой алгебры. Ввиду отсутствия в группе характеров тора $\mathbf{T}^n$ естественного базиса, мы вместо $\mathbf{Z}^n$ будем употреблять более нейтральный символ M.

Функцию f на торе $\mathbf{T}^n = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[M]$, рассматриваемую как элемент $\mathbf{C}[M]$, называют *многочленом Лорана.* Если $f = \sum\limits_{m\in M} a_m x^m$, то множество $\operatorname{Supp}(f) = \{m \in M,\ a_m \neq 0\}$ называется *носителем* f. Выпуклая оболочка $\operatorname{Supp}(f)$ в вещественном векторном пространстве $M_{\mathbf{R}} = M \otimes \mathbf{R}$ называется *многогранником Ньютона* f и обозначается $\Delta(f)$.

Каждая точка t тора $\mathbf{T}$ определяет гоморфизм групп φ_t: $M \to \mathbf{T}^1$ по формуле $\varphi_t(m) = x^m(t)$. Легко видеть, что это дает отождествление множества всех комплексно-значных точек тора $\mathbf{T}^n$ с множеством $\operatorname{Hom}(M, \mathbf{T}^1)$ групповых гомоморфизмов M в $\mathbf{T}^1$.

2.2. Подробное определение торического многообразия дается в [3] и [8]. Для нас пока существенно лишь то, что оно покрывается аффинными торическими многообразиями (картами) вида $X_\sigma = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[\sigma \cap M]$, где σ — выпуклый многогранный конус в $M_{\mathbf{R}}$. Точки этого многообразия X_σ отождествляются с полугрупповыми гомоморфизмами $\sigma \cap M \to \mathbf{T}^1$ (где $\mathbf{T}^1$ — это $\mathbf{C} \setminus 0$ с умножением в качестве закона композиции). Такое описание показывает, как точки тора $\mathbf{T}^n$ отождествляются с точками X_σ.

Главный интерес для нас будут представлять торические многообразия $\mathbf{P}_\Delta$, построенные по многограннику Δ в $M_{\mathbf{R}}$. Пусть Δ — выпуклый ограниченный многогранник в $M_{\mathbf{R}}$, вершины которого принадлежат M (только такие многогранники в дальнейшем и будут рассматриваться). С каждой гранью Γ многогранника Δ (обозначаем это требование $\Gamma \leqslant \Delta$) свяжем конус $\operatorname{Con}(\Delta, \Gamma) = \bigcup\limits_{r \geqslant 0} r \cdot (\Delta - Q)$, где Q — произвольная точка, лежащая строго внутри Γ. Многообразие $\mathbf{P}_\Delta$ покрывается картами

$$X_{\operatorname{Con}(\Delta,\Gamma)} = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[\operatorname{Con}(\Delta, \Gamma) \cap M],$$

где Γ пробегает грани Δ. На самом деле можно ограничиться лишь вершинами P; для вершины P соответствующую карту обозначаем U_P. Многообразие $\mathbf{P}_\Delta$ проективное и является компактификацией тора $\mathbf{T}_\Delta = X_{\operatorname{Con}(\Delta,\Delta)}$, размерность его равна $\dim \Delta$. Заметим, что при $\dim \Delta \neq n$ тор $\mathbf{T}_\Delta$ отличается от $\mathbf{T}^n$.

С каждой гранью Γ многогранника Δ связано замкнутое подмногообразие в $\mathbf{P}_\Delta$, изоморфное $\mathbf{P}_\Gamma$ и обозначаемое тем же символом. Соответствующий «большой тор» в $\mathbf{P}_\Gamma$ обозначаем $\mathbf{T}_\Gamma$. Для граней Γ и Γ' имеем $\mathbf{P}_\Gamma \cap \mathbf{P}_{\Gamma'} = \mathbf{P}_{\Gamma \cap \Gamma'}$; отсюда видно, что многообразие $\mathbf{P}_\Delta$ очень похоже на многогранник Δ. Мы не будем уточнять это замечание. Отметим только, что символ $\mathbf{P}$ употребляется для того, чтобы подчеркнуть аналогию с проективными пространствами, которые являются частными случаями торических многообразий.

2.3. Многообразие $\mathbf{P}_\Delta$ может иметь особенности, расположенные на подмногообразиях $\mathbf{P}_\Gamma$, $\Gamma < \Delta$. Связано это с непростотой Δ в соответствующих гранях. Дадим нужное определение, ограничившись случаем вершин.

Пусть P — вершина Δ. Многогранник Δ называется *простым в* P (соотв. *простым в* P *относительно* M), если конус $\operatorname{Con}(\Delta, P)$ порождается базисом $M_{\mathbf{R}}$ (соотв. базисом решетки целых M). Многогранник —

простой (соотв. *простой относительно* M), если он такой во всех вершинах.

2.4. Предложение. *Если* Δ — *простой* (*соотв. простой относительно* M), *то многообразие* $\mathbf{P}_\Delta$ *квазигладкое* (*соотв. гладкое*).

В самом деле, допустим, что Δ — простой относительно M в вершине P. Выбирая подходящий изоморфизм $M \simeq \mathbf{Z}^n$, можно считать, что полугруппа $\mathrm{Con}(\Delta, P) \cap M$ изоморфна $\mathbf{N}^n$, а полугрупповое кольцо $\mathbf{C}[\mathrm{Con}(\Delta, P) \cap M]$ — кольцу многочленов $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Но это означает, что карта U_P изоморфна аффинному пространству $\mathbf{C}^n$. Так как карты U_P покрывают $\mathbf{P}_\Delta$, то $\mathbf{P}_\Delta$ — гладкое. Аналогичны рассуждения для простого Δ.

Более того, те же рассуждения показывают, что если Δ — простой относительно M, то дивизор $D = \mathbf{P}_\Delta \setminus \mathbf{T}^n$ имеет трансверсальные пересечения на $\mathbf{P}_\Delta$.

2.5. Следствие. *Если* Δ — *простой многогранник, то числа Ходжа* $h^{p,q}(\mathbf{P}_\Delta)$ *равны* 0 *при* $p \neq q$, *а*

$$h^{p,p}(\mathbf{P}_\Delta) = (-1)^p \sum_{\Gamma \leqslant \Delta} (-1)^{\dim\Gamma} C^p_{\dim\Gamma}.$$

Доказательство. Так как $\mathbf{P}_\Delta$ разлагается на торы $\mathbf{T}_\Gamma$, $\Gamma \leqslant \Delta$, то $e(\mathbf{P}_\Delta) = \sum_{\Gamma \leqslant \Delta} (x\bar{x} - 1)^{\dim\Gamma}$ (см. 1.6 и 1.10 д). С другой стороны, $\mathbf{P}_\Delta$ компактно и, согласно предыдущему предложению, квазигладко, поэтому $h^{p,q}(\mathbf{P}_\Delta) = (-1)^{p+q} e^{p,q}(\mathbf{P}_\Delta)$ (см. 1.5).

2.6. Пусть Δ и Δ' — многогранники в $M_{\mathbf{R}}$. Скажем, что Δ' *мажорирует* Δ, если существует отображение α: $\mathrm{som}(\Delta') \to \mathrm{som}(\Delta)$ множества вершин Δ' в множество вершин Δ такое, что $\mathrm{Con}(\Delta, \alpha(P')) \subset \mathrm{Con}(\Delta', P')$. Такое отображение α, если оно существует, только одно. Оно распространяется на множества всех граней, если за $\alpha(\Gamma')$ принять грань Δ, имеющую вершинами $\alpha(P')$, $P' \in \mathrm{som}(\Gamma')$.

Если Δ' мажорирует Δ, то имеется естественный морфизм алгебраических многообразий $\rho = \rho_{\Delta',\Delta} : \mathbf{P}_{\Delta'} \to \mathbf{P}_\Delta$. Этот морфизм карту $U_{P'}$ отображает в карту $U_{\alpha(P')}$ и на уровне этих аффинных карт контраградиентен естественному гомоморфизму полугрупповых алгебр $\mathbf{C}[\mathrm{Con}(\Delta, \alpha(P')) \cap \cap M] \to \mathbf{C}[\mathrm{Con}(\Delta', P') \cap M]$.

Морфизмы предыдущего вида можно использовать для разрешения особенностей многообразия $\mathbf{P}_\Delta$. В самом деле, для каждого Δ существует многогранник Δ', простой и мажорирующий Δ.

2.7. Если Δ' мажорирует Δ, а Δ мажорирует Δ' (в этом случае Δ и Δ' можно назвать подобными), то пространства $\mathbf{P}_\Delta$ и $\mathbf{P}_{\Delta'}$ канонически изоморфны. Таким образом, весь класс подобных друг другу многогранников определяет одно и то же торическое многообразие. Чему же соответствует в этом случае сам многогранник Δ? Оказывается, что он определяет поляризацию $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\Delta$, т. е. некоторый обильный обратимый пучок $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\Delta)$ на $\mathbf{P}_\Delta$. Более точно, $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\Delta)$ — подпучок пучка рациональных функций на $\mathbf{P}$, сечения которого над аффинной картой U_P ($P \in \mathrm{som}(\Delta)$) имеют вид $x^P f(x)$, где $f(x)$ — произвольная регулярная функция на U_P, т. е. $f(x)$ — элемент $\mathbf{C}[\mathrm{Con}(\Delta, P) \cap M]$. Как следует из [8, теорема 13], обратимый пучок $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\Delta)$ обилен, т. е. некоторая его кратность дает проективное вложение $\mathbf{P}$.

Предыдущую конструкцию можно слегка обобщить. А именно, пусть многогранник Δ' мажорирует Δ. Рассмотрим на $\mathbf{P}=\mathbf{P}_{\Delta'}$ обратимый пучок (дробных идеалов) $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\Delta)=\overset{*}{\rho}_{\Delta',\Delta}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_\Delta}(\Delta))$. Его локальное описание по существу прежнее — над аффинной картой $U_{P'}$ сечения $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\Delta)$ имеют вид $x^{\alpha(P')}f(x)$, где $\alpha(P')$ — вершина Δ, соответствующая вершине P' при мажорировании, а $f(x)$ — произвольный многочлен Лорана из $\mathbf{C}[\mathrm{Con}(\Delta', P')\cap M]$.

Такое описание пучков $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\Delta)$ выражается в простой характеризации их когомологических свойств. Прежде всего, для любого $m\in\Delta\cap M$ функция x^m является глобальным сечением $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\Delta)$. Введем соответствующее обозначение: $L(\Delta)$ — пространство всех многочленов Лорана с носителями в Δ.

2.8. Предложение. а) $H^0(\mathbf{P}_{\Delta'}, \mathcal{O}(\Delta))=L(\Delta)$;

б) $H^i(\mathbf{P}_{\Delta'}, \mathcal{O}(\Delta))=0$ *при* $i>0$.

Доказательство можно найти в [6].

2.9. Наряду с обратимыми пучками $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\Delta)$ нам понадобится описание пучков дифференциальных форм на пространстве $\mathbf{P}=\mathbf{P}_\Delta$. Мы будем предполагать здесь, что $\mathbf{P}$ — гладкое, т. е. что многогранник Δ — простой относительно M, хотя это и не существенно. По объясненной в 1.11 причине для нас большой интерес представляют пучки $\Omega^p_{(\mathbf{P},D)}$, где $D=\mathbf{P}-\mathbf{T}$. Напомним, что $\Omega^p_{(\mathbf{P},D)}$ — ядро гомоморфизма ограничения форм

$$\Omega^p_{\mathbf{P}}\to\bigoplus_{\Gamma}\Omega^p_{\mathbf{P}_\Gamma},$$

где Γ пробегает грани коразмерности 1 в Δ. Вся дальнейшая деятельность с этими пучками основана на существовании канонического изоморфизма

$$\Lambda^p(M)\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-D)\simeq\Omega^p_{(\mathbf{P},D)}.$$

Здесь $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-D)$ обозначает, как обычно, пучок идеалов D, т. е. пучок ростков функций, равных нулю на $D=\mathbf{P}-\mathbf{T}$.

Для доказательства мы явно укажем этот изоморфизм. Он переводит тензор $m_1\wedge\ldots\wedge m_p\otimes f$, где $m_1,\ldots,m_p\in M$, а f — локальное сечение $\mathcal{O}(-D)$, в p-форму $f\,\dfrac{dx^{m_1}}{x^{m_1}}\wedge\ldots\wedge\dfrac{dx^{m_p}}{x^{m_p}}$. Легко проверяется, что это дает гомоморфизм пучков $\Lambda^p(M)\otimes\mathcal{O}(-D)\to\Omega^p_{(\mathbf{P},D)}$. Остается проверить, что так получается изоморфизм. Последнее можно делать над каждой картой U_P. Каждая такая карта изоморфна $\mathbf{C}^n$, а D превращается в координатные гиперплоскости; после этого проверка уже не представляет трудностей.

Из этого изоморфизма при $p=n$ видно, что пучок $\mathcal{O}(-D)$ изоморфен каноническому пучку $\Omega^n_{(\mathbf{P},D)}=\Omega^n_{\mathbf{P}}$.

Обозначим через $L^*(\Delta)$ пространство многочленов Лорана, носитель которых лежит строго внутри многогранника Δ. Легко понять (сравни с 2.8а)), что при $\dim\Delta=n$ пространство $L^*(\Delta)$ отождествляется с пространством глобальных сечений обратимого пучка $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-D)\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\Delta)$. Это доказывает первую часть следующего утверждения.

2.10. Предложение. *Пусть Δ — n-мерный многогранник в $M_{\mathbf{R}}$, а Δ' — простой относительно M, мажорирующий Δ. Пусть $\mathbf{P}=\mathbf{P}_{\Delta'}$, тогда*

$$H^i(\mathbf{P}, \Omega^p_{(\mathbf{P},D)}(\Delta)) = \begin{cases} \Lambda^p(M)\otimes L^*(\Delta), & i=0, \\ 0, & i>0. \end{cases}$$

Доказательство. Нужно проверить ацикличность $\Omega^p_{(\mathbf{P},D)}(\Delta)$, а для этого можно считать, что $p=n$. Но в этом случае $\Omega^n_{(\mathbf{P},D)}=\Omega^n_{\mathbf{P}}$ — канонический пучок на $\mathbf{P}$, и ацикличность $\Omega^n_{\mathbf{P}}(\Delta)=K\otimes\mathcal{O}(\Delta)$ следует из утверждения § 4 работы [6].

В частности, в предположениях 2.10 мы получаем для характеристики Эйлера — Пуанкаре пучка $\Omega^p_{(\mathbf{P},D)}$ (Δ) формулу

$$\chi(\mathbf{P}, \Omega^p_{(\mathbf{P},D)}(\Delta)) = C^p_n l^*(\Delta),$$

где $l^*(\Delta)=\dim L^*(\Delta)$ — число целых точек, лежащих строго внутри Δ. Очевидно также, что $\chi(\mathbf{P}, \Omega^p_{(\mathbf{P},D)}) = (-1)^n C_n{}^p$.

§ 3. Теоремы типа Лефшеца для торических многообразий

В этом параграфе приводятся некоторые теоремы сравнения свойств торического многообразия $\mathbf{P}_\Delta$ и его гиперплоского сечения.

3.1. Каждая регулярная функция f на торе $\mathbf{T}^n=\operatorname{Spec}\mathbf{C}[M]$, или, что то же самое, каждый многочлен Лорана $f\in\mathbf{C}[M]$, определяет гиперповерхность в $\mathbf{T}^n$. Эта гиперповерхность задается уравнением $f(x)=0$; мы обозначаем ее Z_f или просто Z. Любая гиперповерхность в торе $\mathbf{T}^n$ имеет такой вид.

3.2. Пусть теперь Δ — многогранник в $M_{\mathbf{R}}$, содержащий $\operatorname{supp}(f)$. Тогда $f\in L(\Delta)$ и, согласно 2.7, f можно рассматривать как глобальное сечение обратимого пучка $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ (Δ) на торическом многообразии $\mathbf{P}_\Delta$. Как сечение $\mathcal{O}(\Delta)$, f определяет гиперповерхность в $\mathbf{P}_\Delta$, состоящую из точек, где это сечение обращается в нуль. Получающуюся гиперповерхность мы будем обозначать символом $\bar{Z}_{(\Delta,f)}$ или $\bar{Z}$. На локальной карте U_P (где P — вершина Δ; см. 2.2) подмногообразие $\bar{Z}$ задается уравнением $x^{-P}f(x)=0$. Предполагая, что $\dim\Delta=n$, мы видим, что $\bar{Z}\cap\mathbf{T}^n=Z$, так что в этом случае $\bar{Z}$ является компактификацией Z (хотя и не обязательно замыканием Z в $\mathbf{P}_\Delta$). Отметим также, что в силу обильности $\mathcal{O}(\Delta)$ многообразие $\mathbf{P}_\Delta - \bar{Z}$ аффинно.

В дальнейшем нам понадобится чуть более общая конструкция. Пусть снова Δ' мажорирует Δ; рассматривая f как сечение обратимого пучка $\mathcal{O}(\Delta)$ на $\mathbf{P}_{\Delta'}$, мы получаем гиперповерхность в $\mathbf{P}_{\Delta'}$, которую будем обозначать $\bar{Z}_{(\Delta',\Delta,f)}$. Разумеется, $\bar{Z}_{(\Delta',\Delta,f)}=\rho^{-1}_{\Delta',\Delta}(\bar{Z}_{(\Delta,f)})$. Это снова компактификация Z, и в аффинной карте $U_{P'}$ $(P'\in\operatorname{som}(\Delta'))$ она задается уравнением $x^{-\alpha(P')}f(x)=0$, где α — отображение мажорирования (см. 2.6).

Отсюда легко понять, как устроено пересечение $\bar{Z}_{(\Delta',\Delta,f)}$ с тором $\mathbf{T}_{\Gamma'}$, где Γ' — грань Δ'. Пусть $\alpha(\Gamma')$ — соответствующая грань Δ. Сдвигая Δ и Δ', можно считать, что Γ' и $\alpha(\Gamma')$ содержат 0; пусть $M_{\Gamma'}$ — подрешетка в M, высеченная порожденным Γ' подпространством в $M_{\mathbf{R}}$ Пусть, наконец, $f_{\alpha(\Gamma')}$ — след многочлена Лорана f на грани $\alpha(\Gamma')$. Тогда $\bar{Z}_{(\Delta',\Delta,f)}\cap$ $\cap\mathbf{T}_{\Gamma'}$ — это гиперповерхность в торе $\mathbf{T}_{\Gamma'}=\operatorname{Spec}\mathbf{C}[M_{\Gamma'}]$, заданная уравнением $f_{\alpha(\Gamma')}=0$.

3.3. Следующие два утверждения сравнивают фундаментальную группу π_1 и группу Пикара Pic гиперповерхности $\bar{Z}$ с аналогичными группами $\mathbf{P}_\Delta$ (строение последних смотри в [3]). Так как в дальнейшем эти результаты не используются, то мы ограничимся самыми общими формулировками. Доказательства их несложно вытекают из теории Лефшеца — Гротендика, однако детали увели бы нас в сторону.

Итак, пусть $f \in L(\Delta)$, где Δ — n-мерный многогранник, а $\bar{Z} = \bar{Z}_{(\Delta, f)}$ — соответствующая гиперповерхность в $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\Delta$.

3.4. Предложение. а) *Если $n \geqslant 2$, то $\bar{Z}$ связно.*

б) *Если $n \geqslant 3$, то $\pi_1(\bar{Z})$ — конечная циклическая группа.*

в) *Если $n \geqslant 3$ и Δ — простой относительно M, то $\pi_1(\bar{Z}) = 0$.*

Примеры показывают, что если Δ не простой относительно M, то $\bar{Z}$ может быть неодносвязным многообразием, даже если Δ — симплекс размерности $\geqslant 3$. В этом, быть может, самое интересное отличие от гиперповерхностей в проективных пространствах.

3.5. Предложение. а) *Если $n \geqslant 3$, то* $\operatorname{Pic} \bar{Z}$ *— группа конечного типа и* $\operatorname{Pic} \mathbf{P} \to \operatorname{Pic} \bar{Z}$ *— вложение.*

б) *Если $n \geqslant 4$ и Δ — простой, то* $\operatorname{Pic} \mathbf{P}$ *— подгруппа конечного индекса в* $\operatorname{Pic} \bar{Z}$.

в) *Если $n \geqslant 4$ и Δ — простой относительно M, то* $\operatorname{Pic} \mathbf{P} = \operatorname{Pic} \bar{Z}$.

3.6. Предыдущие два факта относились к произвольному многочлену Лорана f; начиная с этого места мы будем всегда предполагать, что f невырожден. *Многочлен Лорана $f \in L(\Delta)$ невырожден относительно Δ,* если гиперповерхность $\bar{Z} = \bar{Z}_{(\Delta, f)}$ трансверсально пересекает все страты $\mathbf{P}$. Иначе говоря, для каждой грани $\Gamma \leqslant \Delta$ многообразие $\bar{Z} \cap \mathbf{T}_\Gamma$ должно быть гладким и иметь коразмерность 1 в $\mathbf{T}_\Gamma$. В частности, $\bar{Z}$ не должно проходить через «вершины» $\mathbf{P}$ (т. е. точки вида $\mathbf{P}_P$, где $P \in \operatorname{som}(\Delta)$) и, значит, Δ должен совпадать с многогранником Ньютона f. Это позволяет говорить просто о невырожденности f.

Если f невырожден относительно Δ, а Δ' мажорирует Δ, то $\bar{Z}' = \bar{Z}_{(\Delta', \Delta, f)}$ также трансверсально пересекает страты $\mathbf{P}_{\Delta'}$. В частности, если еще Δ' — простой относительно M, то многообразие $\bar{Z}'$ гладкое, а дивизор $D_Z = D \cap \bar{Z}'$ имеет трансверсальные пересечения (см. 2.4). Отметим, наконец, что «общий» элемент из $L(\Delta)$ невырожден относительно Δ, как следует из теоремы Бертини (см. [6]).

Следующая теорема типа Лефшеца сравнивает когомологии торического многообразия $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\Delta$ и его невырожденного гиперплоского сечения $\bar{Z} = \bar{Z}_{(\Delta, f)}$. Здесь и далее до конца параграфа Δ — многогранник размерности $n = \operatorname{rg} M$.

3.7. ТЕОРЕМА. *Гомоморфизм Гизина $H^i(\bar{Z}, \mathbf{C}) \to H^{i+2}(\mathbf{P}, \mathbf{C})$ является изоморфизмом при $i > n-1 = \dim \bar{Z}$ и сюрьективен при $i = n-1$.*

Доказательство. Гомоморфизм Гизина включается в точную последовательность

$$H^{i+1}(\mathbf{P} \setminus \bar{Z}) \to H^i(\bar{Z}) \to H^{i+2}(\mathbf{P}) \to H^{i+2}(\mathbf{P} \setminus \bar{Z})$$

гиперкогомологий точной последовательности комплексов

$$0 \to \Omega^{\cdot}_{\mathbf{P}} \to \Omega^{\cdot}_{\mathbf{P}}(\log D) \to \Omega^{\cdot -1}_{\bar{Z}} \to 0.$$

Здесь комплексы и пучки Ω и $\Omega(\log)$ на тороидальных многообразиях $\mathbf{P}$ и $\bar{Z}$ понимаются в смысле [3, §§ 13 и 15]. Левый гомоморфизм — вычет Пуанкаре. Так как $\mathbf{P} \setminus \bar{Z}$ — аффинное тороидальное многообразие, то его когомологии $H^i(\mathbf{P}\setminus\bar{Z}, \mathbf{C})$ равны 0 при $i>n$ (см. [3, §§ 13, 6]). Это завершает доказательство.

3.8. Следствие. *Для любого открытого торического подмногообразия $U\subset\mathbf{P}$ гомоморфизм Гизина $H_c^i(\bar{Z}\cap U)\to H_c^{i+2}(U)$ биективен при $i>n-1$ и сюръективен при $i=n-1$.*

Доказательство. Так как U получается из $\mathbf{P}$ выбрасыванием нескольких стратов, то достаточно проверить, что утверждение остается верным, когда из U выбрасывается замкнутое неприводимое $\mathbf{T}$-инвариантное подмногообразие F. Обозначим $U\setminus F$ как V и рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками (см. 1.4в)):

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to H_c^{i-1}(\bar{Z}\cap F) & \to & H_c^i(\bar{Z}\cap V) & \to & H_c^i(\bar{Z}\cap U) & \to & H_c^i(\bar{Z}\cap F) & \to \\
\downarrow{\scriptstyle\gamma_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_i} & & \downarrow{\scriptstyle\beta_i} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_i} & \\
\to H_c^{i+1}(F) & \to & H_c^{i+2}(V) & \to & H_c^{i+2}(U) & \to & H_c^{i+2}(F) & \to
\end{array}$$

Так как $\bar{F}$ (замыкание F в $\mathbf{P}$) снова является торическим многообразием, но уже меньшей размерности, а $\bar{Z}\cap\bar{F}$ — обильная и невырожденная гиперповерхность в $\bar{F}$, то по индуктивному предположению утверждение следствия выполняется для F. После этого доказательство заканчивается рутинным поиском по диаграмме.

В частности, для $U=\mathbf{T}^n$ мы получаем следующее

3.9. Предложение. *Гомоморфизм Гизина $H_c^i(Z, \mathbf{C})\to H_c^{i+2}(\mathbf{T}^n, \mathbf{C})$ является изоморфизмом при $i>n-1=\dim Z$.*

3.10. Замечание. В двойственной формулировке «естественный гомоморфизм $H^i(\mathbf{T})\to H^i(Z)$ биективен при $i<n-1$» утверждение предложения 3.9 было впервые доказано Д. Н. Бернштейном. Его доказательство, основанное на теории Морса и очень прозрачное, пока не опубликовано. Первый из авторов получил чисто алгебраическое доказательство этого факта. Приводимое выше доказательство — третье из известных авторам. Отметим, что упомянутые результаты переносятся и на полные пересечения (см. § 6).

3.11. Так как когомологии тора $\mathbf{T}$ и структура Ходжа на них хорошо известны (см. 1.10д)), то предложение 3.9 дает полную информацию о структуре Ходжа на $H_c^i(Z)$ при $i>\dim Z$. В самом деле, для таких i имеем изоморфизм структур Ходжа $H_c^i(Z)=H_c^{i+2}(\mathbf{T})$ [1]. Если же $i<\dim Z$, то $H_c^i(Z)=0$; это общий факт про гладкие аффинные многообразия. Поэтому главный интерес представляют когомологии «средней» размерности $H_c^{n-1}(Z)$. Видно также, что числа Ходжа — Делиня $h^{p,q}(H_c^{n-1}(Z))$ легко восстанавливаются по $e^{p,q}(Z)$.

Эти замечания, а также тот факт, что $h^{p,q}(H_c^{n-1}(Z))=0$ при $p+q>n-1$ (см. 1.4г)), позволяют получить из 3.9 следующую формулу: при $p+q>n-1$

$$e^{p,q}(Z)=e^{p+1,q+1}(\mathbf{T})=\begin{cases}0, & p\neq q,\\ (-1)^{n+p+1}C_n^{p+1}, & p=q.\end{cases}$$

§ 4. Вычисление χ_y-характеристики

В этом параграфе вычисляется χ_y-характеристика гиперповерхности Z в торе $\mathbf{T}$, т. е. сумма $\sum_q e^{p,q}(Z)$. Вместе с теоремами типа Лефшеца это является вторым важным ингредиентом вычисления $e^{p,q}(Z)$. Всюду предполагается, что многогранник Ньютона Δ имеет размерность $n=\dim M_{\mathbf{R}}$.

4.1. Пусть $f \in L(\Delta)$ — невырожденный многочлен Лорана. Пусть Δ' — простой относительно M многогранник, мажорирующий Δ. Обозначим через $\bar{Z}$ гиперповерхность $\bar{Z}_{(\Delta',\Delta,f)}$ в $\mathbf{P}=\mathbf{P}_{\Delta'}$; $\bar{Z}$ является гладкой компактификацией $Z=Z_f$ с трансверсально пересекающимся дивизором $D_Z=D\cap\bar{Z}$ на бесконечности, где $D=\mathbf{P}\setminus\mathbf{T}$. Согласно 1.13, $\sum\limits_q e^{p,q}(Z)$ с точностью до знака совпадает с характеристикой Эйлера — Пуанкаре пучка $\Omega^p_{(\bar{Z},D_Z)}$ на $\bar{Z}$. Вычисление последней довольно стандартным образом (сравни с [4]) переносится на $\mathbf{P}$. Мы напомним вкратце, как это делается, так как, во-первых, Хирцебрух работает с пучками $\Omega_{\bar{Z}}^{-p}$, а во-вторых, делает все несколько иначе.

Прежде всего заметим, что имеется общая точная последовательность когерентных пучков на $\mathbf{P}$:

$$0\to\Omega^p_{(\bar{Z},D_Z)}\otimes_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}\mathcal{O}_\mathbf{P}(-\bar{Z})\to\Omega^{p+1}_{(\mathbf{P},D)}\otimes_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}\mathcal{O}_{\bar{Z}}\to\Omega^{p+1}_{(\bar{Z},D_Z)}\to 0.$$

Она аналогична соответствующей последовательности обычных пучков дифференциалов (см. [4, п. 16, 3]) и легко получается из последней при переходе к ядрам соответствующих морфизмов ограничения. Вспоминая, что $\bar{Z}$ задается сечением обратимого пучка $\mathcal{O}_\mathbf{P}(\Delta)$, мы видим, что $\mathcal{O}_\mathbf{P}(\bar{Z})\cong\mathcal{O}_\mathbf{P}(\Delta)$. Умножая предыдущую точную последовательность тензорно на обратимые пучки $\mathcal{O}_\mathbf{P}((k+1)\Delta)$ и переходя к характеристикам Эйлера — Пуанкаре, мы получаем формулу

$$\chi(\bar{Z},\Omega^p_{(\bar{Z},D_Z)})=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\chi(\mathbf{P},\Omega^{p+k+1}_{(\mathbf{P},D)}((k+1)\Delta)\otimes_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}\mathcal{O}_{\bar{Z}}).$$

Далее, пользуясь точной последовательностью

$$0\to\mathcal{O}_\mathbf{P}(-\Delta)\to\mathcal{O}_\mathbf{P}\to\mathcal{O}_{\bar{Z}}\to 0,$$

мы получаем:

$$\chi(\bar{Z},\Omega^p_{(\bar{Z},D_Z)})=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k[\chi(\mathbf{P},\Omega^{p+k+1}_{(\mathbf{P},D)}((k+1)\Delta))-\chi(\mathbf{P},\Omega^{p+k+1}_{(\mathbf{P},D)}(k\Delta))].$$

Все это общие места; специфика же торической ситуации проявляется в том, что слагаемые этой суммы при помощи предложения 2.10 могут быть выражены в терминах числа точек в многогранниках $k\Delta$. После ряда элементарных преобразований мы получаем окончательный результат:

$$\chi(\bar{Z},\Omega^p_{(\bar{Z},D_Z)})=(-1)^{n+1}C_n^{p+1}-\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k C_{n+1}^{p+k+1}l^*(k\Delta).$$

Напомним, что $l^*(k\Delta)$ — число целых точек, лежащих строго внутри многогранника $k\Delta$.

4.2. Замечание. Здесь и далее мы интересуемся лишь размерностью пространства сечений пучков $\Omega^p_{(\mathbf{P},D)}(k\Delta)$. Однако предложение 2.10 доставляет более тонкую структуру градуировки типа M на этих пространствах. Учет этой более тонкой структуры бывает иногда очень существенным (см. [5]).

4.3. Чтобы более компактно представить ответ, полученный в 4.1, введем некоторые функции, связанные с многогранниками. Пусть Δ — многогранник в $M_\mathbf{R}$ (уменьшая, если нужно, M, можно считать, что Δ

порождает $M_{\mathbf{R}}$); образуем ряд Пуанкаре внутренности Δ:

$$Q_\Delta(t)=\sum_{k>0} l^*(k\Delta)t^k,$$

где l^* — число относительно внутренних целых точек многогранника. Как мы скоро увидим, функция

$$\Phi_\Delta(t)=Q_\Delta(t)(1-t)^{\dim\Delta+1}$$

является многочленом от t степени $\dim\Delta+1$. Коэффициенты $\Phi_\Delta(t)$ обозначим $\varphi_i(\Delta)$; таким образом,

$$\Phi_\Delta(t)=\sum_{i\geqslant 0}\varphi_i(\Delta)t^i.$$

Ясно, что $\varphi_0(\Delta)=0$, $\varphi_1(\Delta)=l^*(\Delta)$ и, вообще,

$$\varphi_i(\Delta)=(-1)^i\sum_{j\geqslant 1}(-1)^j C^{i-j}_{\dim\Delta+1}l^*(j\Delta).$$

Сравнивая это выражение (при $i=n-p$) с окончательной формулой 4.1, мы получаем (для n-мерного Δ) формулу:

4.4. $(-1)^{n-1}\sum_q e^{p,q}(Z)=(-1)^p C_n^{p+1}+\varphi_{n-p}(\Delta)$.

Из этой формулы, в частности, видно, что $\varphi_i(\Delta)=0$ при $i>n+1$ и что $\varphi_{n+1}(\Delta)=1$.

4.5. Замечание. Суммируя 4.4 по p, мы получаем выражение для эйлеровой характеристики:

$$E(Z)=\sum_k(-1)^k\dim H_c^k(Z)=\sum_k(-1)^k\dim H^k(Z),$$

равное с точностью до знака $\sum_i\varphi_i(\Delta)=\Phi_\Delta(1)$. Так как $\Phi_\Delta(1)=n!V(\Delta)$, где $V(\Delta)$ — n-мерный объем Δ, то мы снова получаем формулу (см. [7])

$$E(Z)=(-1)^{n-1}n!V(\Delta).$$

4.6. Замечание. Иногда вместо функций $\varphi_i(\Delta)$, связанных с внутренностью, удобнее пользоваться аналогичными функциями, связанными со всем многогранником. Образуем с этой целью ряд Пуанкаре для Δ:

$$P_\Delta(t)=\sum_{k\geqslant 0} l(k\Delta)t^k$$

и многочлен (степени $\leqslant\dim\Delta$)

$$\psi_\Delta(t)=P_\Delta(t)(1-t)^{\dim\Delta+1}=\sum_i\psi_i(\Delta)t^i.$$

Из двойственности Серра для пучков $\mathcal{O}(k\Delta)$ на многообразии $\mathbf{P}_\Delta$ можно вывести, что $\varphi_i(\Delta)=\psi_{\dim\Delta+1-i}(\Delta)$. Поэтому формулу 4.4 можно переписать так:

$$(-1)^{n-1}\sum_q e^{p,q}(Z)=(-1)^p C_n^{p+1}+\psi_{p+1}(\Delta).$$

Эта формула удобна при малых p, тогда как 4.4 — при p, близких к n.

§ 5. Числа Ходжа — Делиня гиперповерхности в торе

Этот параграф — центральный в работе. В нем мы показываем, как знание $\sum_q e^{p,q}(Z)$ позволяет восстановить все числа $e^{p,q}(Z)$ для невырожденной гиперповерхности в торе Z, а значит, и все числа Ходжа — Делиня для Z. Во многих случаях для них удается дать явные формулы.

5.1. Пусть Δ — многогранник в $M_{\mathbf{R}}$, а $f \in \mathbf{C}[M]$ — невырожденный относительно Δ многочлен Лорана. Сейчас мы приведем алгоритм вычисления чисел $e^{p,q}(Z)$ для гиперповерхности $Z = Z_f$ в торе $\mathbf{T}^n = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[M]$.

Однако прежде всего заметим, что достаточно ограничиться случаем, когда $\dim \Delta = n = \operatorname{rg} M$. В самом деле, в общем случае Z является прямым произведением гиперповерхности Z' с тем же уравнением в некотором торе размерности $\dim \Delta$ на тор $\mathbf{T}'$ дополнительной размерности, $Z = Z' \times \mathbf{T}'$. Из мультипликативности e (предложение 1.8) следует:

$$e(Z) = e(Z') \cdot e(\mathbf{T}') = e(Z')(x\bar{x} - 1)^{\dim \mathbf{T}'}.$$

5.2. Итак, дополнительно к предположениям 5.1 будем считать, что $\dim \Delta = n$. Пусть Δ' — простой (относительно M, если угодно) многогранник, мажорирующий Δ, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\Delta'}$ и $\bar{Z} = \bar{Z}_{(\Delta', \Delta, f)}$. Обозначив для грани $\Gamma' \leqslant \Delta'$ через $Z_{\Gamma'}$ гиперповерхность $\bar{Z} \cap \mathbf{T}_{\Gamma'}$ в торе $\mathbf{T}_{\Gamma'}$ (см. 2.2 и 3.2; многогранником Ньютона $Z_{\Gamma'}$ является $\alpha(\Gamma')$), мы получаем разложение $\bar{Z} = \bigcup_{\Gamma' \leqslant \Delta'} Z_{\Gamma'}$. Поэтому

$$e^{p,q}(\bar{Z}) = e^{p,q}(Z_{\Delta'}) + \sum_{\Gamma' < \Delta'} e^{p,q}(Z_{\Gamma'}).$$

Заметим, что $Z_{\Delta'} = Z$, а при $\Gamma' < \Delta'$ гиперповерхность $Z_{\Gamma'}$ имеет меньшую размерность, так что по индукции числа $e^{p,q}(Z_{\Gamma'})$ можно считать известными.

Согласно 3.11 известны и числа $e^{p,q}(Z)$ при $p+q > n-1$, а значит, и числа $e^{p,q}(\bar{Z})$ при $p+q > n-1$. По двойственности Пуанкаре для гладкого (или квазигладкого) многообразия $\bar{Z}$ при $p+q < n-1$ числа $e^{p,q}(\bar{Z}) = e^{n-1-p,n-1-q}(\bar{Z})$ также известны. Возвращаясь к формуле, связывающей $e(\bar{Z})$ и $e(Z)$, мы получаем все числа $e^{p,q}(Z)$ при $p+q < n-1$.

Так как суммы $\sum_q e^{p,q}(Z)$ также известны (см. 4.1 или 4.4), то мы получаем последнее недостающее число $e^{p,n-1-p}(Z)$.

5.3. Замечание. Изложенный метод нахождения чисел $e^{p,q}(Z)$ совершенно прозрачен и конструктивен и без сомнения является алгоритмом. Видно, что числа $e^{p,q}(Z)$ определяются по многограннику Δ; более точно, они зависят от комбинаторики Δ (т. е. от схемы примыкания граней) и от чисел $l^*(k\Delta)$ или $l(k\Delta)$ для всех граней Γ и целых k (достаточно, впрочем, только условия $0 < k < \dim \Gamma$).

В некоторых частных случаях, которые мы обсудим ниже, приведенных соображений достаточно для получения явных формул для чисел $e^{p,q}(Z)$. В общем случае явные формулы были в самое последнее время получены вторым из авторов.

5.4. Замечание. Как уже объяснялось в 3.11, знание $e^{p,q}(Z)$ полностью восстанавливает все числа Ходжа — Делиня $h^{p,q}(H_c^k(Z))$. Тем самым находится трехпараметрическое семейство чисел, тогда как априори известно было лишь однопараметрическое — $\sum_q e^{p,q}(\Delta)$.

5.5. Важнейший частный случай, когда числа $e^{p,q}(Z)$ вычисляются до конца явно,— это случай простого многогранника Δ. Мы начнем, однако, с компактного случая, т. е. с чисел Ходжа для $\overline{Z}=\overline{Z}_{(\Delta,f)}$ — канонической компактификации Z.

Разлагая $\overline{Z}$ в объединение Z_Γ (Γ пробегает грани Δ), как в 5.2, и пользуясь аддитивностью $e^{p,q}$, мы получаем:

$$\sum_q e^{p,q}(\overline{Z}) = \sum_{\Gamma\leqslant\Delta}\sum_q e^{p,q}(Z_\Gamma) =$$
$$=(-1)^{p+1}\sum_{\Gamma\leqslant\Delta}(-1)^{\dim\Gamma}C_{\dim\Gamma}^{p+1} - \sum_{\Gamma\leqslant\Delta}(-1)^{\dim\Gamma}\varphi_{\dim\Gamma-p}(\Gamma).$$

Отметим, что первое слагаемое этого выражения — не что иное, как $h^{p+1,p+1}(\mathbf{P})$ (см. 2.5).

Воспользуемся теперь теоремой Лефшеца 3.7, из которой видно, что при $p+q>n-1$ $e^{p,q}(\overline{Z})=e^{p+1,q+1}(\mathbf{P})$. По двойственности Пуанкаре для $\overline{Z}$ (здесь-то и используется простота Δ) мы получаем, что $e^{p,q}(\overline{Z})$ отличны от нуля лишь при $p=q$ или $p+q=n-1$. Таким образом, если $p+q=n-1$; $p\neq q$, то

$$e^{p,q}(\overline{Z}) = -\sum_{\Gamma\leqslant\Delta}(-1)^{\dim\Gamma}\varphi_{\dim\Gamma-p}(\Gamma).$$

Если же $p+q=n-1$; $p=q$, то

$$e^{p,p}(\overline{Z}) = \sum_{\Gamma\leqslant\Delta}(-1)^{\dim\Gamma}[(-1)^{p+1}C_{\dim\Gamma}^{p+1} - \varphi_{\dim\Gamma-p}(\Gamma)].$$

Остальные $e^{p,q}(\overline{Z})$ либо равны 0, либо восстанавливаются по симметрии. В частности, при $n>1$

$$h^{n-1,0}(\overline{Z}) = h^{0,n-1}(\overline{Z}) = \varphi_1(\Delta) = l^*(\Delta).$$

Предполагая по прежнему простоту Δ, дадим теперь формулы для $e^{p,q}(Z)$. По довольно понятным причинам мы ограничимся случаем $p>q$.

5.6. ТЕОРЕМА. *Предположим, что многогранник Ньютона Δ простой и n-мерный. Тогда при $p>q$*

$$e^{p,q}(Z) = (-1)^{n+p+q}\sum_{\dim\Gamma=p+q+1}\left(\sum_{\Gamma'\leqslant\Gamma}(-1)^{\dim\Gamma'}\varphi_{\dim\Gamma'-p}(\Gamma)\right).$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (следующей из 1.7)

$$e^{p,q}(Z) = \sum_{\Gamma\leqslant\Delta}(-1)^{n-\dim\Gamma}e^{p,q}(\overline{Z}_\Gamma),$$

где $\overline{Z}_\Gamma=\overline{Z}\cap\mathbf{P}_\Gamma$. Согласно предыдущему разделу, при $p>q$ все $e^{p,q}(\overline{Z}_\Gamma)$ равны нулю, кроме случая $p+q=\dim\Gamma-1$, когда

$$e^{p,q}(\overline{Z}_\Gamma) = -\sum_{\Gamma'\leqslant\Gamma}(-1)^{\dim\Gamma'}\varphi_{\dim\Gamma'-p}(\Gamma').$$

Это и доказывает теорему.

В частности, при $q=0$ и $p>0$ имеем

$$h^{p,0}(H_c^{n-1}(Z)) = (-1)^{n-1}e^{p,0}(Z) = \sum_{\dim\Gamma=p+1} l^*(\Gamma).$$

Как мы увидим ниже, эта формула верна для любого Δ.

5.7. Замечание. Формулу из 5.6 можно переписать в виде

$$e^{p,q}(Z) = (-1)^{n+p+q} \sum_{\Gamma \leqslant \Delta} (-1)^{\dim \Gamma} C_{n-\dim \Gamma}^{n-p-q-1} \varphi_{\dim \Gamma - p}(\Gamma).$$

5.8. Предложение. *Для произвольного многогранника* Δ *в* $M_{\mathbf{R}}$ *и для* $p > 0$

$$e_{p,0}(Z) = (-1)^{n-1} \sum_{\dim \Gamma = p+1} l^*(\Gamma),$$

где Γ *пробегает* $(p+1)$*-мерные грани* Δ.

Доказательство. Прежде всего можно предположить, что $\dim \Delta = n$. В самом деле, в общем случае Z домножается на тор размерности $n - \dim \Delta$, а $e^{p,0}$ — на $(-1)^{n-\dim \Delta}$. Считая теперь Δ n-мерным, воспользуемся рассуждением п. 5.2. Пусть Δ' — простой многогранник, мажорирующий Δ, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\Delta'}$, $\overline{Z} = \overline{Z}_{(\Delta', \Delta, f)}$. Пусть Γ' — грань Δ', отличная от Δ'; так как $\dim Z_{\Gamma'} < n-1$, то $e^{n-1-p, n-1}(Z_{\Gamma'}) = 0$. Кроме того, числа $e^{n-1-p, n-1}(Z)$ также равны 0 при $0 < p < n-1$ (см. 3.11). Предполагая в дальнейшем, что $0 < p < n-1$, мы докажем предложение; что же касается $p = n-1$, то в этом случае формула сразу следует из 4.3.

По двойственности Пуанкаре для $\overline{Z}$ мы получаем, что $e^{p,0}(\overline{Z}) = 0$. С другой стороны,

$$e^{p,0}(\overline{Z}) = \sum_{\Gamma' \leqslant \Delta'} e^{p,0}(Z_{\Gamma'}).$$

Если $\Gamma' \neq \Delta'$, то гиперповерхность $Z_{\Gamma'} = \overline{Z} \cap \mathbf{T}_{\Gamma'}$ имеет меньшую размерность и можно воспользоваться индуктивным предположением. Поэтому для доказательства предложения остается проверить, что

$$\sum_{\Gamma' \leqslant \Delta'} (-1)^{\dim \Gamma' - 1} \sum_{\substack{\Gamma \leqslant \alpha(\Gamma') \\ \dim \Gamma = p+1}} l^*(\Gamma) = 0,$$

где $\alpha(\Gamma')$ — грань Δ, соответствующая Γ' при мажорировании 2.6. Выражение слева можно переписать так:

$$- \sum_{\substack{\Gamma \leqslant \Delta \\ \dim \Gamma = p+1}} l^*(\Gamma) \left\{ \sum_{\substack{\Gamma' \leqslant \Delta' \\ \Gamma \leqslant \alpha(\Gamma')}} (-1)^{\dim \Gamma'} \right\}.$$

Поэтому достаточно проверить, что для каждой грани Γ многогранника Δ, отличной от Δ,

$$\sum_{\substack{\Gamma' \leqslant \Delta' \\ \Gamma \leqslant \alpha(\Gamma')}} (-1)^{\dim \Gamma'} = 0.$$

Для этого удобно перейти к веерам Σ_Δ и $\Sigma_{\Delta'}$, двойственным многогранникам Δ и Δ'. Более точно, свяжем с каждой гранью Γ многогранника Δ конус σ_Γ, двойственный конусу $\mathrm{Con}(\Delta, \Gamma)$; аналогично с $\Gamma' \leqslant \Delta'$ свяжем конус $\sigma_{\Gamma'}$. Условие $\Gamma \leqslant \alpha(\Gamma')$ превратится при этом в условие $\sigma_{\Gamma'} \subset \sigma_\Gamma$. Набор конусов $\sigma_{\Gamma'}$, где $\Gamma \leqslant \alpha(\Gamma')$, образует коническое многогранное разбиение конуса σ_Γ. Так как $\dim \Gamma' = n - \dim \sigma_{\Gamma'}$, то предыдущее равенство превращается в равенство

$$\sum_{\sigma_{\Gamma'} \subset \sigma_\Gamma} (-1)^{\dim \sigma_{\Gamma'}} = 0,$$

которое уже почти очевидно. Предложение 5.8 доказано.

5.9. Следствие. *При* $\dim\Delta=n\geqslant 4$ *имеем:*

$$e^{n-2,1}(Z)=(-1)^{n-1}\left[\varphi_2(\Delta)-\sum_{\dim\Gamma=n-1}\varphi_1(\Gamma)\right]$$

(Напомним, что $\varphi_2(\Delta)=l^*(2\Delta)-(n+1)l^*(\Delta)$, а $\varphi_1(\Gamma)=l^*(\Gamma)$.)

5.10. Следствие. $e^{0,0}(Z)=(-1)^{n-1}(\Pi-1)$, *где* Π — *число целых точек, лежащих на* 1-*мерном остове* Δ.

В самом деле, рассуждая, как в начале доказательства 5.8, можно считать, что $\dim\Delta=n$. Так как $e^{0,p}(Z)=e^{p,0}(Z)$, то

$$(-1)^{n-1}(e^{0,1}(Z)+\ldots+e^{0,n-1}(Z))=\sum_{\dim\Gamma\geqslant 2}l^*(\Gamma).$$

С другой стороны, согласно 4.6,

$$(-1)^{n-1}\sum_q e^{0,q}(Z)=n+\psi_1(\Delta).$$

Так как $\psi_1(\Delta)+n+1=l(\Delta)=\sum_{\Gamma\leqslant\Delta}l^*(\Gamma)$, то

$$(-1)^{n-1}e^{0,0}(Z)=\sum_{\dim\Gamma\leqslant 1}l^*(\Gamma)-1=\Pi-1.$$

5.11. Полученные в 5.8—5.10 формулы позволяют дать явные ответы для любых многогранников Ньютона размерности $\leqslant 4$. Мы ограничимся числами Ходжа — Делиня наиболее интересных «средних» когомологий $H_c^{n-1}(Z)$.

а) $n=1$. В этом случае Δ — отрезок длины l и Z состоит из $l=l^*(\Delta)+1=l(\Delta)-1$ точек.

б) $n=2$. В этом случае Z — гладкая кривая рода $l^*(\Delta)$, из которой выброшены Π точек. Здесь и далее Π — число целых точек на одномерном остове Δ. Таблица чисел Ходжа для $H_c^1(Z)$ имеет вид

$l^*(\Delta)$	0
$\Pi-1$	$l^*(\Delta)$

в) $n=3$. Z — открытая поверхность; таблица Ходжи для $H_c^2(Z)$ имеет вид

$l^*(\Delta)$	0	0
$\sum_\Gamma l^*(\Gamma)$	$h^{1,1}$	0
$\Pi-1$	$\sum_\Gamma l^*(\Gamma)$	$l^*(\Delta)$

где $h^{1,1}=\varphi_2(\Delta)-\sum_\Gamma l^*(\Gamma)$. Суммирование здесь ведется по двумерным граням Δ. Напомним также, что $\varphi_2(\Delta)=l^*(2\Delta)-4l^*(\Delta)$.

Кстати, каноническая компактификация $\bar Z=\bar Z_{(\Delta,f)}$ является квазигладкой поверхностью, числа Ходжа которой равны:

$$h^{0,0}(\bar{Z}) = h^{2,2}(\bar{Z}) = 1,$$
$$h^{2,0}(\bar{Z}) = h^{0,2}(\bar{Z}) = l^*(\Delta),$$
$$h^{1,1}(\bar{Z}) = \varphi_2(\Delta) - 3 - \sum_{\Gamma}(l^*(\Gamma) - 1),$$
$$h^{0,1} = h^{1,0} = h^{2,1} = h^{1,2} = 0.$$

г) $n=4$. Обозначаем символом Γ 3-мерные грани Δ, а символом F — 2-мерные грани Δ. Тогда таблица Ходжа для $H_c^3(F)$ имеет вид

$^*(\Delta)$	0	0	0
$\sum_{\Gamma} l^*(\Gamma)$	$h^{1,2}$	0	0
$\sum_{F} l^*(F)$	$h^{1,1}$	$h^{2,1}$	0
$\Pi - 1$	$\sum_{F} l^*(F)$	$\sum_{\Gamma} l^*(\Gamma)$	$l^*(\Delta)$

где

$$h^{2,1} = h^{1,2} = \varphi_2(\Delta) - \sum_{\Gamma} l^*(\Gamma),$$
$$h^{1,1} = \varphi_3(\Delta) - \varphi_2(\Delta) + \sum_{\Gamma} l^*(\Gamma) - \sum_{F} l^*(F).$$

Кстати, $\varphi_2(\Delta) = l^*(2\Delta) - 5l^*(\Delta)$, а $\varphi_3(\Delta) = \psi_2(\Delta) = l(2\Delta) - 5l(\Delta) + 10$.

5.12. Зная числа $e^{p,q}$ для гиперповерхностей в торах, мы тем самым знаем их для гиперповерхностей в любых торических многообразиях. Разберем более подробно случай гиперповерхностей в n-мерном аффинном пространстве $\mathbf{A} = \mathbf{C}^n$. В этом случае решетка M обладает естественным базисом и имеет полное право обозначаться $\mathbf{Z}^n$. Многогранник Ньютона многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ расположен в положительном ортанте $\mathbf{R}_+^n$. Как и раньше, мы предполагаем невырожденность многочлена f; соответствующую гиперповерхность $f(x) = 0$ в $\mathbf{A}$ обозначим Z^a.

Принцип изучения Z^a тот же — разбиваем $\mathbf{A}^n$ на торы и суммируем $e^{p,q}$. Точнее, для каждого $I \subset \{1, \ldots, n\}$ обозначим через Z_I гиперповерхность в торе $(\mathbf{C} \setminus 0)^{|I|}$, задаваемую уравнением $f_I = 0$. Многогранник Ньютона f_I — это $\Delta_I = \Delta \cap \mathbf{R}^I$; разумеется, если Δ не пересекает $\mathbf{R}^I$, то $Z_I = (\mathbf{C} \setminus 0)^{|I|}$. Суммируя по I, получим:

$$e^{p,q}(Z^a) = \sum_I e^{p,q}(Z_I).$$

Это снова дает эйлерову характеристику Z^a (см. [7, § 4]):

$$E(Z^a) = \sum_I (-1)^{|I|-1} |I|! V_{|I|}(\Delta_I),$$

однако еще мало что говорит о когомологиях Z^a.

Более полный ответ получается, если предположить дополнительно, что многогранник Ньютона Δ удобный, т. е. совпадает с $\mathbf{R}^n_+$ в некоторой окрестности 0. Во-первых, в этом случае $H_c^k(Z_a) = 0$ при $k < n-1$ (аффинность и тороидальность Z^a), а во-вторых, $H_c^k(Z^a) = H_c^{k+2}(\mathbf{A})$ [1] при

$k > n-1$ (следствие 3.8). Иначе говоря, все $H_c^k(Z^a)$ нулевые, кроме $H_c^{n-1}(Z^a)$ и $H_c^{2n-2}[Z^a] = \mathbf{C}[1-n]$. Таким образом, единственной нетривиальной структурой является $H_c^{n-1}(Z^a)$, для которой

$$(-1)^{n-1} h^{p,q}(H_c^{n-1}(Z^a)) = \begin{cases} e^{p,q}(Z^a), & (p,q) \neq (n-1, n-1), \\ e^{p,q}(Z^a) - 1, & (p,q) = (n-1, n-1). \end{cases}$$

§ 6. Полные пересечения

В этом параграфе мы показываем, как предыдущие результаты применяются к вычислению структуры Ходжа полных пересечений в торе.

6.1. Пусть снова $\mathbf{T}^n$ — n-мерный тор с решеткой характеров M, а $f_1, \ldots, f_r \in \mathbf{C}[M]$ — r многочленов Лорана, определяющих r гиперповерхностей $Z_i = Z_{f_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$ в $\mathbf{T}^n$. Пусть Δ_i — многогранник Ньютона f_i. Всюду далее предполагается, что система $f_1, \ldots, f_r$ невырождена (определение см. в [7]).

Для невырожденной системы $f_1, \ldots, f_r$ гиперповерхности $Z_1, \ldots, Z_r$ пересекаются трансверсально и задают полное пересечение $Y = Z_1 \cap \ldots \cap Z_r$. Более того, если Δ — любой n-мерный многогранник, мажорирующий $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$, то гиперповерхности $\overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_r$ в $\mathbf{P}_\Delta$ пересекаются трансверсально (и трансверсальны дивизору $D = \mathbf{P}_\Delta - \mathbf{T}^n$); в этом и заключается геометрическое определение невырожденности системы $f_1, \ldots, f_r$.

6.2. Для вычисления $e^{p,q}(Y)$ мы добавляем вспомогательные переменные $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ (множители Лагранжа) и рассматриваем в торическом многообразии $\mathbf{C}^r \times \mathbf{T}$ гиперповерхность Z_F с уравнением

$$F(\lambda, x) = \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_r f_r(x) - 1 = 0.$$

Многогранник Ньютона Λ многочлена F — это выпуклая оболочка (в пространстве $\mathbf{R}^r \times M_\mathbf{R}$) следующих $(r+1)$ многогранника: $\{0\}$, $\{e_1\} \times \Delta_1, \ldots, \{e_r\} \times \Delta_r$, где $e_1, \ldots, e_r$ — естественный базис $\mathbf{Z}^r$. Легко проверить, что F невырожден относительно Λ.

Используя проекцию $\mathbf{C}^r \times \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$, мы отобразим Z_F на $\mathbf{T}^n$, $\pi: Z_F \to \mathbf{T}^n$. Легко понять, что для точки x из Y слой $\pi^{-1}(x)$ пуст. Если же $x \notin Y$, то слой $\pi^{-1}(x)$ является линейным аффинным подпространством в $\mathbf{C}^r$. Более того, Z_F является локально тривиальным (в топологии Зариского) расслоением над $\mathbf{T}^n \setminus Y$ со слоем $\mathbf{C}^{r-1}$. Поэтому согласно 1.9

$$e(Z_F) = (x\bar{x})^{r-1} e(\mathbf{T}^n \setminus Y)$$

или

$$e^{p,q}(Y) = e^{p,q}(\mathbf{T}^n) - e^{p+r-1, q+r-1}(Z_F).$$

Эта формула сводит полное пересечение Y к гиперповерхности Z_F. Заметим, впрочем, что Z_F — гиперповерхность не в торе, а в $\mathbf{C}^r \times \mathbf{T}^n$.

6.3. Полное пересечение $Y \subset \mathbf{T}^n$ гладкое и аффинное, $\dim Y = n - r$. Поэтому $H_c^i(Y) = 0$ при $i < n - r$. Кроме того, как и для гиперповерхностей, для Y имеется следующая теорема типа Лефшеца (Д. Н. Бернштейн):

6.4. ТЕОРЕМА. *Предположим, что все многогранники Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ имеют размерность $n = \mathrm{rg}\, M$. Тогда гомоморфизм Гизина*

$$H_c^i(Y) \to H_c^{i+2r}(\mathbf{T}^n)$$

является изоморфизмом при $i > n - r$.

Таким образом, структура Ходжа $H_c^k(Y)$ при $k>n-r$ также хорошо известна. Вместе с формулой 6.2 для чисел $e^{p,q}(Y)$ это позволяет восстановить и числа Ходжа $h^{p,q}(H_c^{n-1}(Y))$.

6.5. Замечание. Предположение об n-мерности многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ в теореме 6.4 можно несколько ослабить (но не отбросить совсем). А именно, достаточно потребовать выполнения следующего условия: *для любого непустого* $I\subset\{1, \ldots, r\}$ *размерность многогранника* $\sum\limits_{i\in I}\Delta_i$ *не меньше* $n+|I|-r$. В этом случае мы также получаем все числа Ходжа — Делиня Y.

6.6. Замечание. Без всяких условий на Δ_i, суммируя по p и q формулу из 6.2, мы получаем $E(Y)=-E(Z_F)$. Используя формулу 4.5 для эйлеровой характеристики гиперповерхности в торе, находим:

$$E(Z_F)=\sum_I(-1)^{n+|I|-1}(n+|I|)!\,V_{n+|I|}(\Lambda_I).$$

Здесь I пробегает подмножества $\{1, \ldots, r\}$, $\Lambda_I=\Lambda\cap(\mathbf{R}^I\times M_{\mathbf{R}})$, а $V_{n+|I|}(\Lambda_I)$ означает $(n+|I|)$-мерный объем Λ_I.

Обозначим через $\Delta_1*\ldots*\Delta_r$ выпуклую оболочку в пространстве $\mathbf{R}^r\times \times M_{\mathbf{R}}$ многогранников $\{e_1\}\times\Delta_1, \ldots, \{e_r\}\times\Delta_r$. Тогда Λ — это пирамида с вершиной $\{0\}$ и основанием $\Delta_1*\ldots*\Delta_r$. Вообще, для $I\subset\{1, \ldots, r\}$ обозначим через Δ^{*I} многогранник $\mathop{*}\limits_{i\in I}\Delta_i$; тогда Λ_I — пирамида над Δ^{*I}. Так как $(n+|I|)\cdot V_{n+|I|}(\Lambda_I)=V_{n+|I|-1}(\Delta^{*I})$, то формулу для $E(Y)$ можно переписать так:

$$E(Y)=\sum_I(-1)^{n+|I|}(n+|I|-1)!\,V_{n+|I|-1}(\Delta^{*I}).$$

Сравнивая эту формулу с формулой из [7, теорема 2], мы получаем следующую формулу:

$$(n+r-1)!\,Y_{n+r-1}(\Delta_1*\ldots*\Delta_r)=n!\sum_{\bar{k},|\bar{k}|=n}V_n(\Delta^{\bar{k}}).$$

Здесь для мультииндекса $\bar{k}=(k_1, \ldots, k_r)$ $V_n(\Delta^{\bar{k}})$ обозначает смешанный объем $V_n(\underbrace{\Delta_1, \ldots, \Delta_1}_{k_1\text{ раз}}, \ldots, \underbrace{\Delta_r, \ldots, \Delta_r}_{k_r\text{ раз}})$.

Литература

1. *Делинь П.* Теория Ходжа. II.— Математика, 1973, т. 17, вып. 5, с. 3—57.
2. *Deligne P.* Theorie de Hodge. III.— Publ. Math. IHES, 1974, № 44.
3. *Данилов В. И.* Геометрия торических многообразий.— Успехи матем. наук, 1978, т. 33, вып. 2, с. 85—134.
4. *Хирцебрух Ф.* Топологические методы в алгебраической геометрии. М.: Мир, 1973.
5. *Данилов В. И.* Многогранники Ньютона и исчезающие когомологии.— Функц. анализ и его прилож., 1979, т. 13, вып. 2, с. 32—47.
6. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и торические многообразия.— Функц. анализ и его прилож., 1977, т. 11, вып. 4, с. 56—67.
7. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и род полных пересечений.— Функц. анализ и его прилож., 1978, т. 12, вып. 1, с. 51—61.
8. *Kempf G., Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B.* Toroidal Embeddings. I.— Lect. Notes in Math., 1973, № 339.

Поступила в редакцию
13.VII.1984