УДК 517.55

Об одной лемме Концевича*

© 1997. А. Г. Хованский

В. И. Арнольду к его шестидесятилетию

Недавно М. Концевич построил универсальную теорию квантования. Среди открытых им фактов содержится следующее утверждение. Пусть $f_1, \dots, f_{2n}$ суть $2n$ рациональных функций на полном комплексном алгебраическом многообразии M, комплексная размерность которого равна n. Пусть M_0 — множество неособых точек алгебраического многообразия M, из которого выброшено объединение носителей дивизоров функций $f_1, \dots, f_{2n}$. Обозначим через $\arg f_i$ аргумент функции f_i.

Лемма Концевича. $\displaystyle\int_{M_0} d\arg f_1 \wedge \dots \wedge d\arg f_{2n} = 0$.

В последнем списке задач В. И. Арнольда есть следующая задача: дать наглядное доказательство леммы Концевича. В настоящей заметке такое доказательство приводится.

1. Преобразование дифференциальной формы.

Лемма 1. *Справедливо тождество*

$$d\arg f_1 \wedge \dots \wedge d\arg f_{2n} \equiv d\ln|f_1| \wedge \dots \wedge d\ln|f_{2n}|.$$

Доказательство. Пусть I_x — оператор умножения на мнимую единицу в касательном пространстве к многообразию M в неособой точке x. Мы будем рассматривать I_x как вещественное линейное преобразование. Во-первых, определитель этого преобразования равен единице. Во-вторых, в силу аналитичности функции $\ln f_i$ справедливо тождество

$$I_x^* d\arg f_i = d\ln|f_i|.$$

Отсюда и вытекает лемма 1.

Функции $\ln|f_i|$ в отличие от функций $\arg f_i$ являются однозначными. Поэтому лемма 1 почти полностью объясняет лемму Концевича. Единственное оставшееся затруднение доставляют особенности функций $\ln|f_i|$. Покажем, как его преодолеть.

2. Разрешение особенностей. Рассмотрим рациональное отображение $F\colon M \to (\mathbb{CP}^1)^{2n}$, переводящее точку x в точку $(f_1(x), \dots, f_{2n}(x))$. Согласно теореме Хиронаки, существуют неособое компактное комплексное многообразие N и регулярное отображение $\pi\colon N \to M$, такие, что

1) общая точка многообразия M имеет единственный прообраз при отображении π;

2) отображение $G = F \circ \pi$ регулярно;

* Работа выполнена при частичной поддержке гранта № 95-011-8701 Российского фонда фундаментальных исследований и Канадского гранта No. 0GP0156833.

3) объединение Γ носителей дивизоров функций и $g_i = f_i \circ \pi$ является объединением трансверсально пересекающихся гладких гиперповерхностей в многообразии N.

Лемму Концевича достаточно доказать для многообразия N и функций $g_1, \ldots, g_{2n}$. Действительно, многообразия M и N различаются лишь множеством меньшей размерности, и это различие никак не сказывается на интегралах.

3. Полярные координаты. Около точек гиперповерхности Γ на многообразии N удобно ввести полярные координаты. Пусть U — координатная окрестность на многообразии N и $z_1, \ldots, z_n$ — такие координаты, что гиперповерхность Γ в карте U задается уравнением $z_1 \cdots z_k = 0$, где k — некоторое неотрицательное число. Отождествим область U с ее образом в $\mathbb{C}^n$ при вложении, заданном координатными функциями z_j. Пусть $\mathbb{R}^{2n}$ — пространство с координатными функциями $r_1, \varphi_1, \ldots, r_k, \varphi_k, x_{k+1}, y_{k+1}, \ldots, x_n, y_n$ и $V \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ — область, определенная неравенствами $r_1 \geqslant 0, \ldots, r_k \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi, \ldots, 0 \leqslant \varphi_k \leqslant 2\pi$.

Рассмотрим отображение ρ области V в $\mathbb{C}^n$, заданное формулами $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$ при $1 \leq j \leqslant k$ и $z_j = x_j + iy_j$ при $k < j \leqslant n$.

Лемма 2. *Форма $\rho^* d\ln|g_1| \wedge \cdots \wedge \rho^* d\ln|g_{2n}|$ является гладкой в прообразе области U.*

Доказательство. Пусть g — одна из функций $g_1, \ldots, g_{2n}$. По условию функция g в области U представима в виде произведения функции, не обращающейся в нуль, на моном $z_1^{m_1} \cdots z_k^{m_k}$. Поэтому $d\ln|g| = \sum m_j \dfrac{dr_j}{r_j} + \alpha$, где α — гладкая 1-форма в области U. Разложим гладкую 1-форму $\rho^*\alpha$ по координатному базису в области V. Коэффициент A_j при $d\varphi_j$ в этом разложении делится на r_j, т.е. $A_j = r_j B_j$, где B_j — гладкая функция. Поэтому в произведении $\rho^* d\ln|g_1| \wedge \cdots \wedge \rho^* \ln|g_{2n}|$ отрицательные степени всех координатных функций r_j сокращаются и полученная форма является гладкой.

Следствие. *Интеграл из леммы Концевича абсолютно сходится.*

После разрешения особенностей следствие вытекает из леммы 2. Действительно, компактное многообразие N покрывается конечным числом карт U, в которых действует эта лемма.

4. Отображение степени нуль. Сопоставим комплексному числу его модуль. Это отображение продолжается по непрерывности до отображения комплексной проективной прямой в вещественную проективную прямую. Обозначим через $\mu\colon (\mathbb{CP}^1)^{2n} \to (\mathbb{RP}^1)^{2n}$ декартову степень этого отображения. Образ многообразия $(\mathbb{CP}^1)^{2n}$ при отображении μ является замыканием в $(\mathbb{RP}^1)^{2n}$ положительного октанта $(\mathbb{R}_+)^{2n}$.

Пусть $G\colon N \to (\mathbb{CP}^1)^{2n}$, $G = (g_1, \ldots, g_{2n})$ — регулярное отображение n-мерного многообразия N в $(\mathbb{CP}^1)^{2n}$ и Γ — объединение носителей дивизоров функций $g_1, \ldots, g_{2n}$.

Лемма 3. *Ограничение на область $N \setminus \Gamma$ отображения $\mu \circ G$ является собственным отображением этой области во внутренность положительного октанта. Степень этого собственного отображения равна нулю.*

Доказательство. Прообраз границы положительного октанта в многообразии $(\mathbb{RP}^1)^{2n}$ при отображении $\mu \circ G$ совпадает с гиперповерхностью Γ. Поэтому ограничение этого отображения на область $N \setminus \Gamma$ является собственным отображением.

Рассмотрим на октанте $(\mathbb{R}_+)^{2n}$ форму старшей степени

$$\omega_{2n} = \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_{2n}}{x_{2n}}.$$

Объем октанта относительно такой формы бесконечен. Однако интеграл $\int_{N\setminus\Gamma}(\mu \circ G)^*\omega_{2n}$ абсолютно сходится (см. следствие из п. 2). Поэтому почти каждая точка положительного октанта лежит вне образа области $N \setminus \Gamma$. Следовательно, степень отображения $\mu \circ G$ равна нулю.

5. Завершение доказательства. Согласно следствию из п. 2, интеграл из леммы Концевича абсолютно сходится. В силу леммы 3 этот интеграл равен нулю.

6. Замечание. После того как заметка была написана, мне удалось познакомиться с оригинальным доказательством М. Концевича (*Kontsevich M.* Deformation quantization of Poisson manifolds. Preliminary version). Оно основано на сходной идее. Но все детали различаются, и в нашем варианте они проще.

Институт системного анализа РАН

Поступило в редакцию
5 сентября 1997 г.