1997 г. ноябрь — декабрь *т. 52, вып. 6(318)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 513.015.7

МНОГОУГОЛЬНИКИ НЬЮТОНА, КРИВЫЕ НА ТОРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ И ОБРАЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВЕЙЛЯ

А. Г. Хованский

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Для двух полиномов от одной переменной со старшими коэффициентами, равными единице, справедливо следующее тождество: произведение значений первого полинома по корням второго полинома с точностью до знака равно произведению значений второго полинома по корням первого.

Андрэ Вейль нашел далекое обобщение этого тождества. Оно применимо для любой пары ненулевых мероморфных функций на компактной комплексной кривой.

Приведем определения, нужные для формулировки теоремы Вейля. Пусть

$$(*)\qquad f = c_1 u^{b_1} + \cdots, \qquad g = c_2 u^{b_2} + \cdots,$$

Работа выполнена во время визита в École Normale Supérieure при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-011-8701) и Канадского Гранта № 0GP0156833. Я признателен французским коллегам за гостеприимство.

где $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ – старшие члены рядов Лорана мероморфных функций f и g в окрестности точки a, и u – локальный параметр такой, что $u(a) = 0$. *Типом* ростка вектор-функции (f, g) в точке a называется несократимый целочисленный вектор $\vec{n} = (n_1, n_2)$, пропорциональный его *вектору степени* $\vec{b} = (b_1, b_2)$ с натуральным коэффициентом k, $\vec{b} = k\vec{n}$, который называется *кратностью* ростка вектор-функции. *Приведенным числом Вейля* ростка $(*)$ называется число $c_2^{n_1} c_1^{-n_2}$, где (n_1, n_2) – компоненты типа $\vec{n}$ этого ростка.

По компактной комплексной кривой Γ и мероморфной вектор-функции (f, g) на ней определим функцию $\mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$ на произведении $\mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}} \times \mathbb{C}^*$ множества $\mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$ несократимых целочисленных векторов на плоскости на множество $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел. (Название функции происходит от слова "multiplicity" – кратность.) Функция $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$ принимает целые неотрицательные значения и равна нулю всюду кроме конечного числа точек. Ее значение на паре $(\vec{n}, c)$ по определению равняется суммарной кратности точек на комплексной кривой Γ, в которых росток (f, g) имеет тип $\vec{n}$ и приведенное число Вейля c.

В этих терминах теорема Вейля формулируется следующим образом.

Теорема Вейля.

$$\prod (-c)^{\mathrm{Mul}(\vec{n}, c)} = 1. \tag{1}$$

Степени дивизоров f и g на компактной кривой Γ равны нулю. В терминах функции $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$ эти соотношения принимают следующий и вид:

$$\sum \mathrm{Mul}(\vec{n}, c)\vec{n} = 0. \tag{2}$$

Результаты настоящей статьи основаны на следующем простом наблюдении: числа Вейля ростка (f, g) и ростка (F, G), где $F = f^{a_{11}} g^{a_{12}}$, $G = f^{a_{21}} g^{a_{22}}$ и $A = \{a_{ij}\}$ – целочисленная матрица с определителем 1, равны. Это наблюдение подсказывает, что теорема Вейля должна относиться к двумерной торической геометрии (матрица A задает автоморфизм двумерного тора $\mathbb{C}^{*2}$) и к теории многоугольников Ньютона. Мы показываем, что это действительно так. Прежде всего использование чисел Вейля упрощает и уточняет классическую теорему о многоугольниках Ньютона (см. § 2). С другой стороны, использование многоугольников Ньютона позволяет дать очень простое доказательство теоремы Вейля – оно сводит теорему Вейля к формуле Виета для произведения корней полинома (см. § § 1–2 и § 9).

Обратима ли теорема Вейля? То есть верно ли, что для всякой функции Mul, удовлетворяющей условиям (1)–(2), найдется тройка Γ, f, g такая, что $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$? В статье доказывается, что если у функции Mul больше двух характеристических векторов (т.е. таких векторов $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$, что функция $\mathrm{Mul}(\vec{n}, \cdot)$ на $\mathbb{C}^*$ не равна тождественно нулю), то ответ на этот вопрос положителен. Дается полное описание троек Γ, f, g таких, что $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$.

В исключительном случае, когда функция $\mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$ имеет два характеристических вектора, теорема Вейля допускает уточнение. Функция $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$ в этом случае обладает свойством возвратности

$$\mathrm{Mul}(\vec{n}, c) = \mathrm{Mul}(-\vec{n}, c^{-1}).$$

В § 9 дается простое независимое доказательство этого свойства. Уточненная теорема Вейля оказывается обратимой и в исключительном случае.

С тройкой Γ, f, g связывается некоторый многоугольник, называемый многоугольником Ньютона. Этот многоугольник восстанавливается по функции $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$. Мы показываем, что он играет ту же роль, что и обычный многоугольник Ньютона (см. § 11).

Перейдем к другой теме статьи. Пусть D – дивизор, лежащий на объединении M_∞ одномерных орбит торической поверхности M. Существует ли кривая $\Gamma \subset M$, не проходящая через нульмерные орбиты поверхности M, для которой дивизор D является дивизором пересечения кривой Γ с объединением одномерных орбит M_∞? Пространство таких кривых Γ мы будем обозначать через $\mathscr{R}(D)$, а дивизор D, для которого пространство $\mathscr{R}(D)$ не пусто, будем называть допустимым. В статье дивизоры D кодируются при помощи некоторой функции $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_D$ на $\mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}} \times \mathbb{C}^*$. Условие допустимости дивизора D, как оказывается, в точности совпадает с условием существования тройки Γ, f, g такой, что $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$.

В §§ 6–7 описывается общая кривая из пространства $\mathscr{R}(D)$. С допустимым дивизором D связывается некоторый многоугольник Δ_D. Задача описания общей кривой из пространства $\mathscr{R}(D)$ эквивалентна исследованию общего уравнения $P = 0$ с данным многоугольником Ньютона $\Delta(P) = \Delta_D$ и с фиксированными коэффициентами при мономах, соответствующих точкам на границе многоугольника Δ.

Исследование общего уравнения с данным многогранником Ньютона – традиционная задача. Начальные данные в этой задаче (многогранник Ньютона) дискретны. В нашей задаче кроме дискретных данных (многоугольник Ньютона) фигурируют непрерывные данные (коэффициенты на границе). Решение нашей задачи, в частности, включает в себя описание всех кривых $P = 0$, многоугольник Ньютона которых не содержит внутренних целых точек. Его удается провести потому, что многоугольников без внутренних целых точек не так уж и много (см. § 5).

Среди условий допустимости дивизора D есть дискретное условие и непрерывное условие (условие Виета, см. § 4). В § 10 приводится вариант теоремы Абеля, дающий независимое объяснение условия Виета.

Пусть P – полином Лорана на комплексной плоскости. В статье по полиному Лорана P определяется некоторая функция $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_P$ на пространстве $\mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}} \times \mathbb{C}^*$. Существует ли для заданной функции Mul полином Лорана P такой, что $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_P$?

Именно эта несложная задача играет ключевую роль в настоящей статье. Оказывается, что условия на функцию Mul для существования полинома Лорана P такого, что $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_P$, – это ровно те же условия, о которых говорилось выше (т.е. условия существования тройки Γ, f, g такой, что $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$, или условие допустимости дивизора D такого, что $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_D$).

Задача существования полинома Лорана P такого, что $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_P$, допускает полное решение, использующее лишь элементарную геометрию плоскости (условие Паскаля для выпуклых многоугольников) и элементарную алгебру (формулу Виета для произведения корней полинома). С решения этой задачи мы и начинаем статью.

Одно терминологическое замечание: под словами "многогранник" и "многоугольник" подразумеваются выпуклый многогранник и выпуклый многоугольник.

§ 1. Многоугольники Ньютона, соотношение Паскаля и соотношение Виета

Пусть $P(x, y)$ – полином Лорана на комплексной плоскости и $\Delta = \Delta(P)$ – его многоугольник Ньютона, лежащий в плоскости показателей. Плоскость показателей $\mathbb{R}^2$ будем считать ориентированной. (Ее ориентация задается порядком переменных x, y.) В ней выделена решетка целочисленных показателей. Двойственная плоскость $\mathbb{R}^{2*}$, следовательно, тоже ориентирована, и в ней выделена двойственная решетка, которую мы будем называть решеткой степеней. Обозначим через $\mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$ подмножество в решетке степеней, состоящее из несократимых ненулевых векторов.

С каждым вектором $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$ связана ориентация ортогональной прямой к вектору $\vec{n}$, лежащей в плоскости показателей. Именно, прямая ориентируется как граница области, в которой скалярное произведение с вектором $\vec{n}$ положительно. Так, при обычной ориентации плоскости с внутренней нормалью $\vec{n}$ к стороне двумерного многоугольника Δ связана ее ориентация, соответствующая движению по границе многоугольника против часовой стрелки.

Для каждого вектора $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$ обозначим через $\Delta^{\vec{n}}$ сторону или вершину многоугольника Δ, на которой достигает минимума скалярное произведение с вектором $\vec{n}$.

Для каждого целочисленного многоугольника Δ определена функция Lengh_Δ на $\mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$, сопоставляющая вектору $\vec{n}$ целочисленную длину грани $\Delta^{\vec{n}}$. По определению *целочисленная длина* вершины равна нулю, а целочисленная длина стороны, содержащей $(m+1)$ целую точку, равна m.

Согласно знаменитой теореме Минковского, многомерный многогранник однозначно с точностью до параллельного переноса восстанавливается по функции $S(\vec{n})$, сопоставляющей нормалям $\vec{n}$ площади S соответствующих им граней. Многогранник существует, если и только если выполнено условие Паскаля $\sum S(\vec{n})\vec{n} = 0$.

Следующая простая лемма является двумерным целочисленным вариантом теоремы Минковского. Пусть Lengh – функция на $\mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$ со значениями в целых неотрицательных числах.

Лемма (целочисленный вариант двумерной теоремы Минковского). *Для ненулевой функции* Lengh *существует целочисленный многоугольник* Δ *такой, что* $\mathrm{Lengh} = \mathrm{Lengh}_\Delta$, *если и только если функция отлична от нуля лишь на конечном множестве и выполнено условие Паскаля*

$$\sum \mathrm{Lengh}_\Delta(\vec{n})\vec{n} = 0.$$

Многоугольник Δ *определяется по функции* Lengh *однозначно с точностью до параллельного переноса.*

Доказательство. Покажем, как построить многоугольник по функции Lengh, удовлетворяющий условию Паскаля. Зададим структуру комплексной прямой на плоскости $\mathbb{R}^2$ и отождествим тем самым $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^{2*}$. Рассмотрим конечное множество векторов из $\mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$, для которых функция Lengh не равна нулю. Занумеруем вектора этого множества в порядке, в котором они встречаются при вращении линейки против часовой стрелки вокруг начала координат. Положим $l_{\vec{n}_j} = (-i)\,\mathrm{Lengh}(\vec{n}_j)(\vec{n}_j)$, где i – мнимая единица. Построим из векторов $l_{\vec{n}_j}$ ломаную, последовательно прикладывая начало следующего вектора к концу предыдущего. Условие замыкания ломаной эквивалентно выполнению условия Паскаля. Построенная ломаная является границей искомого многоугольника. Остальные утверждения леммы доказываются столь же просто.

Для каждого вектора $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$ по полиному Лорана P определим следующий полином $P_{\vec{n}}$ от одной переменной. Если $\Delta^{\vec{n}}$ является вершиной Q, то полином $P_{\vec{n}}$ определяется как константа, равная коэффициенту в полиноме Лорана P при мономе, соответствующем вершине Q. Пусть теперь $\Delta^{\vec{n}}$ является стороной l многоугольника Ньютона Δ.

Вершины A, B на этой стороне l будем называть, соответственно, *старшей* и *младшей*, если движение по стороне l от точки A к точке B соответствует ориентации стороны l, связанной с вектором $\vec{n}$. Пусть сторона l имеет целочисленную длину m, т.е. содержит $(m+1)$ целую точку. Занумеруем целые точки на стороне l числами от 0 до m, начиная с младшей вершины B. Пусть коэффициент в полиноме Лорана P при мономе, соответствующем i-й целой точке, равен c_i. Определим полином $P_{\vec{n}}$ формулой $P_{\vec{n}}(\xi) = \sum_{i=0}^{m} c_i \xi^i$. Таким образом, полином $P_{\vec{n}}$ имеет степень, равную целочисленной длине m стороны l. Его старший коэффициент равен коэффициенту в полиноме Лорана P при вершине A. Свободный член полинома $P_{\vec{n}}$ равен коэффициенту полинома Лорана P при вершине B.

Каждому полиному Лорана $P(x,y)$ соответствует функция Mul_P на $\mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}} \times \mathbb{C}^*$, сопоставляющая вектору $\vec{n}$ и комплексному числу c кратность, с которой число c является корнем полинома $P_{\vec{n}}(\xi)$. По функции Mul_P с точностью до множителя восстанавливается каждый из полиномов $P_{\vec{n}}$. В частности, восстанавливаются степени этих полиномов, т.е. функция $\mathrm{Lengh}_{\Delta(P)}$. Поэтому следующий вопрос является алгебраическим вариантом вопроса Минковского: существует ли для заданной функции $\mathrm{Mul}\colon \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}} \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{N}_+$ полином Лорана P, для которого $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_P$? Ниже мы приведем полный ответ на этот вопрос.

Скажем, что вектор $\vec{n}_j \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$ является характеристическим для функции Mul, если ограничение $\mathrm{Mul}(\vec{n}, \cdot\,)$ этой функции на $\mathbb{C}^*$ не равно тождественно нулю.

Теорема (алгебраический аналог двумерной теоремы Минковского). *Для ненулевой функции* Mul *существует полином Лорана P такой, что* $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_P$, *если и только если функция* Mul *имеет конечное число характеристических векторов и*

1) (одномерный случай) *если характеристических векторов не более двух, то выполняется условие возвратности*

$$\mathrm{Mul}(\vec{n}, c) = \mathrm{Mul}(-\vec{n}, c^{-1});$$

2) (двумерный случай) *если характеристических векторов более двух, то выполняются*

a) *условие Паскаля*: $\sum \mathrm{Mul}(\vec{n}, c)\vec{n} = 0$,
b) *условие Виета*: $\prod (-c)^{\mathrm{Mul}(\vec{n}, c)} = 1$.

Доказательство. Начнем с одномерного случая.

Прежде всего, из условия возвратности, очевидно, вытекает как условие Паскаля, так и условие Виета. Кроме того, если ненулевая функция Mul обладает свойством возвратности, то она имеет ровно два характеристических вектора $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, связанных соотношением $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 = 0$.

Если многоугольник Ньютона полинома Лорана P является отрезком l, то полином $P_{\vec{n}}$ не равен константе ровно для двух векторов, а именно, для векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, ортогональных отрезку l. В этом случае имеем очевидные соотношения $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ и $\xi^m P_{\vec{n}_1}(\xi^{-1}) = P_{\vec{n}_2}(\xi)$, где m – целочисленная длина отрезка l. Отсюда вытекает условие возвратности $\mathrm{Mul}_P(\vec{n}_1, c) = \mathrm{Mul}_P(-\vec{n}_1, c^{-1})$. Обратно, пусть функция Mul возвратна и имеет два характеристических вектора $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 = 0$. Многоугольник, построенный по функции $\mathrm{Lengh}(\vec{n}) = \sum \mathrm{Mul}(\vec{n}, c)\vec{n}$ будет отрезком, ортогональным вектору $\vec{n}_1$, целочисленная длина которого равна $\mathrm{Lengh}(\vec{n}_1) = \sum \mathrm{Mul}(\vec{n}_1, c)$.

Рассмотрим полином Лорана P, многоугольник Ньютона которого совпадает с построенным отрезком, а полином $P_{\vec{n}_1}(\xi)$ равен $c_0 \prod(\xi - c)^{\mathrm{Mul}(\vec{n}_1, c)}$. Эти условия определяют полином Лорана P.

Функция $\mathrm{Mul}(P)$ совпадает с функцией Mul, так как полином $P_{\vec{n}_2}(\xi) = \xi^{\mathrm{Lengh}(\vec{n}_1)} \times P_{\vec{n}_1}(\xi^{-1})$ имеет корни, обратные к корням полинома $P_{\vec{n}_1}$. В одномерном случае теорема доказана в обе стороны.

Докажем теперь теорему для двумерного случая. Пусть полином Лорана P имеет двумерный многоугольник Ньютона. Для стороны $l_{\vec{n}}$ многоугольника Ньютона Δ с внутренней нормалью $\vec{n}$ выполнено следующее соотношение:

$$\prod_c (-c)^{\mathrm{Mul}_P(\vec{n}, c)} = \frac{P_B}{P_A},$$

где A и B – соответственно, старшая и младшая вершины на стороне l, а P_A, P_B – коэффициенты в полиноме Лорана P, соответствующие этим вершинам. Действительно, написанное соотношение является формулой Виета для произведения корней полинома $P_{\vec{n}}$. Произведение $\prod(-c)^{\mathrm{Mul}_P(\vec{n}, c)}$ равно единице, так как каждая вершина многоугольника Ньютона является младшей вершиной для одной стороны и старшей – для другой.

Докажем теперь обратное утверждение. В случае 2) условие Паскаля постулируется. Поэтому по функции Mul можно построить многоугольник. Ясно, что он будет двумерным. Знание функции $\mathrm{Mul}(\vec{n}, c)$ при фиксированном векторе $\vec{n}$ позволяет восстановить все коэффициенты полинома Лорана P на стороне $l_{\vec{n}}$ с точностью до произвольного множителя c_0, $P_{\vec{n}}(\xi) = c_0 \prod(\xi - c)^{\mathrm{Mul}(\vec{n}, c)}$.

Покажем, что выполнение условия Виета гарантирует возможность согласованного выбора произвольных множителей в полиномах $P_{\vec{n}}$. Действительно, стороны в двумерном многоугольнике пересекаются лишь по вершинам. Начнем последовательно обходить стороны $l_1, \dots, l_N$ по границе многоугольника Δ и выписывать полиномы $P_{\vec{n}_1}, \dots, P_{\vec{n}_N}$, соответствующие внутренним нормалям к этим сторонам. Обозначим через V_i произведение $\prod(-c)^{\mathrm{Mul}(\vec{n}_i, c)}$. Фиксируем множитель $c_0 = Q$ в старшей вершине стороны l_1 и положим $P_{\vec{n}_1}(\xi) = Q \prod(\xi - c)^{\mathrm{Mul}(\vec{n}_1, c)}$. Тогда коэффициент в младшей вершине этой стороны будет равен QV_1. Младшая вершина стороны l_1 является старшей для стороны l_2. Поэтому полином $P_{\vec{n}_2}(\xi)$ должен быть равен $QV_1 \prod(\xi - c)^{\mathrm{Mul}(\vec{n}_2, c)}$. Коэффициент при младшей вершине стороны l_2 будет равен QV_1V_2. Двигаясь по границе многоугольника, мы дойдем до вершины, с которой начинали. При этом мы не получим противоречия, так как $QV_1 \cdots V_N = Q$, ибо произведение $\prod(-c)^{\mathrm{Mul}(\vec{n},c)}$ по условию Виета равно единице. Итак, мы восстановили с точностью до общего множителя коэффициенты полинома Лорана P на границе многоугольника Δ. Выбирая произвольным образом коэффициенты при мономах, соответствующих внутренним точкам многоугольника Δ, получим полином P такой, что $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}(P)$. Теорема доказана.

Формулируемое ниже следствие имеет довольно неожиданную переформулировку в геометрии торических поверхностей (см. теорему 2 из § 10).

Следствие. *Для всякого целочисленного многоугольника Δ найдется полином Лорана Q, многоугольник Ньютона которого равен Δ, обладающий следующим свойством: все полиномы $Q_{\vec{n}}$, $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$, не имеют корней, отличных от* (-1).

Следствие непосредственно вытекает из теоремы. Впрочем, оно имеет даже более простое доказательство.

Доказательство следствия. Если минимум скалярного произведения с вектором $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$ достигается на некоторой стороне l многоугольника Δ и целочисленная длина стороны l равна $m(l)$, то положим $Q_{\vec{n}}(\xi) = (1+\xi)^{m(l)}$. Если же минимум достигается в вершине, то положим $Q_{\vec{n}}(\xi) \equiv 1$. Как старший, так и младший коэффициенты полинома $(1+\xi)^m$ равны 1. Поэтому если многоугольник Δ двумерен, то, написав на каждой его стороне l полином $(1+\xi)^{m(l)}$, мы не получим противоречия: стороны многоугольника пересекаются лишь по вершинам, и в каждой вершине будет написан коэффициент, равный 1. Если же многоугольник состоит из одного отрезка, то мы не получим противоречия, так как полином $(1+\xi)^m$ возвратен, $\xi^m(1+\xi^{-1})^m = (\xi+1)^m$. Во внутренних целых точках многоугольника Δ можно написать любые коэффициенты. Мы получим искомый полином Лорана Q.

Подведем итог. Функцию Mul будем называть *допустимой*, если она удовлетворяет условию теоремы. По допустимой функции Mul однозначно (с точностью до параллельного переноса) строится многоугольник $\Delta = \Delta(\mathrm{Mul})$. По допустимой функции Mul у полинома Лорана P такого, что $\mathrm{Mul}_P = \mathrm{Mul}$, однозначно (с точностью до одновременного умножения на ненулевую константу) восстанавливаются все коэффициенты при мономах, соответствующих точкам на границе многоугольника Δ. Коэффициенты при внутренних мономах выбираются произвольным образом. Поэтому полиномы Лорана P, для которых $\mathrm{Mul}_P = \mathrm{Mul}$, являются множеством ненулевых векторов в комплексном линейном пространстве, размерность которого равна $B(\Delta) + 1$, где $B(\Delta)$ – число внутренних целых точек многоугольника $\Delta = \Delta(\mathrm{Mul})$.

§ 2. Многоугольники Ньютона и числа Вейля

Пусть Γ – росток аналитической кривой в точке a и u – локальный параметр, $u\colon \Gamma \to C$, такой, что $u(a) = 0$. Рассмотрим росток (f, g) мероморфной функции на Γ. Пусть

$$f = c_1 u^{b_1} + \cdots, \quad g = c_2 u^{b_2} + \cdots, \tag{1}$$

где $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ – старшие члены рядов Лорана этих функций. (Мы предполагаем сейчас и на протяжении всей статьи, что ни росток f, ни росток g не обращаются тождественно в нуль. Мы также всегда будем предполагать, что росток (f, g) не является ростком постоянной вектор-функции.)

Числом Вейля ростка вектор-функции (f, g) назовем число

$$\{f, g\}_a = (-1)^{b_1+b_2+b_1 b_2} c_2^{b_1} c_1^{-b_2}.$$

Несложно проверить, что число $\{f, g\}_a$ определено корректно, т.е. не зависит от выбора локального параметра u.

Числа Вейля встречаются в теореме Вейля (см. § 9), тесно связанной с материалом настоящей статьи.

Приведем определения еще нескольких инвариантов ростка (1) вектор-функции (f, g). *Типом* ростка вектор-функции (f, g) называется несократимый целочисленный вектор $\vec{n} = (n_1, n_2)$, пропорциональный его *вектору степени* $\vec{b} = (b_1, b_2)$ с натуральным коэффициентом k, $\vec{b} = k\vec{n}$, который называется *кратностью* ростка вектор-функции (f, g). *Приведенным числом Вейля* $[f, g]_a$ ростка вектор-функции (f, g) называется число $[f, g] = c_2^{n_2} c_1^{-n_1}$, где (n_1, n_2) – компоненты типа $\vec{n}$ этого ростка.

Непосредственно из определений выводится следующая

Лемма 1. *Число Вейля следующим образом выражается через приведенное число Вейля и кратность ростка*:

$$\{f, g\}_a = (-[f, g]_a)^k.$$

Инварианты ростка мероморфной функции, с которыми мы имеем дело, сохраняются при степенных преобразованиях. Пусть $A = \{a_{ij}\}$ – унимодулярная матрица (т.е. матрица с целыми коэффициентами и определителем, равным единице) размера 2×2. С матрицей A связано степенное преобразование вектор-функции (f, g). Росток (f, g) при этом преобразовании переходит в росток (F, G), где

$$F = f^{a_{11}} g^{a_{12}} \quad \text{и} \quad G = f^{a_{21}} g^{a_{22}}.$$

Лемма 2. *Для всякой унимодулярной матрицы A тип ростка вектор-функции (F, G) равен $A\vec{n}$, где $\vec{n}$ – тип ростка вектор-функции (f, g). Кратность, приведенное число Вейля и число Вейля для ростка вектор-функции (F, G) такие же, как для ростка вектор-функции (f, g).*

Лемма 2 проверяется непосредственным вычислением. Она подсказывает, что числа Вейля должны быть связаны с теорией многоугольников Ньютона и с двумерной торической геометрией.

В статье мы покажем, что это действительно так. Прежде всего, использование чисел Вейля упрощает формулировку приведенной ниже классической теоремы о многоугольниках Ньютона.

Пусть алгебраическая кривая Γ лежит в торе $\mathbb{C}^{*2}$ с координатными функциями x и y. На нормализации $\overline{\Gamma}$ этой кривой определены две мероморфные функции x и y, мероморфно отображающие кривую $\overline{\Gamma}$ в тор $\mathbb{C}^{*2}$ на кривую $\Gamma \subset \mathbb{C}^{*2}$. Следующая теорема восходит к Ньютону.

Теорема 1 (о многоугольниках Ньютона). *Пусть кривая* Γ *определена в* $\mathbb{C}^{*2}$ *уравнением* $P(x,y)=0$ *и не имеет кратных компонент. На нормализации* $\overline{\Gamma}$ *этой кривой существуют точки, в которых вектор-функция* (x,y) *имеет тип* $\vec{n}\neq 0$, *если и только если на многоугольнике Ньютона* $\Delta(P)$ *минимум скалярного произведения с вектором* $\vec{n}$ *достигается на стороне этого многоугольника. Более того, посчитанное с учетом кратностей число точек, в которых вектор-функция* (x,y) *имеет тип* $\vec{n}$, *а ее приведенное число Вейля является заданным числом* ξ_0, *равно порядку* $\operatorname{ord}_{\xi_0} P_{\vec{n}}$ *полинома* $P_{\vec{n}}$ *в точке* ξ_0.

Доказательство. Сделаем степенное преобразование плоскости x,y при помощи унимодулярной матрицы A, переводящей несократимый вектор $\vec{n}$ в вектор $(1,0)$. При таком преобразовании ни приведенные числа Вейля, ни кратности ростков вектор-функции (x,y) на кривой $\overline{\Gamma}$ не меняются (см. лемму 1). Нас интересуют такие точки на кривой $\overline{\Gamma}$, в окрестности которых функции x и y имеют вид

$$x=c_1u^k+\cdots,$$
$$y=c_2+\cdots,$$

где $c_1c_2\neq 0$, $k>0$.

Допустим, что минимум скалярного произведения с вектором $(1,0)$ достигается на стороне l многоугольника $\Delta(P)$. Параллельно перенесем многоугольник $\Delta(P)$ так, чтобы младшая вершина на стороне l находилась в начале координат. Параллельный перенос соответствует умножению полинома Лорана P на моном и не меняет кривой Γ, определенной в торе $\mathbb{C}^{*2}$ уравнением $P=0$.

После такого преобразования ограничение полинома Лорана P на ось y при $y\neq 0$ определено. При этом полином $P(0,y)$ совпадает с определенным выше полиномом $P_{\vec{n}}(\xi)$ при $\xi=y$. С одной стороны, в точке $(0,\xi_0)$ кратность пересечения оси y с замыканием кривой $\Gamma\subset\mathbb{C}^{*2}$ равна кратности корня ξ_0 полинома $P(0,y)=P_{\vec{n}}(y)$. С другой стороны, эта кратность равна числу точек на нормализованной кривой $\overline{\Gamma}$, около которых

$$x=c_1u^k+\cdots,$$
$$y=\xi_0+\cdots,$$

посчитанных с учетом их кратностей k. Что и нужно было доказать.

Если минимум скалярного произведения с вектором $\vec{n}$ достигается в вершине многоугольника $\Delta(P)$, то теорема доказывается так же (и даже проще: в этом случае полином $P_{\vec{n}}$ является константой и вообще не имеет корней).

Теорема о многоугольниках Ньютона непосредственно обобщается на случай алгебраических кривых, имеющих кратные компоненты. *Полной кратностью* для ростка (1) вектор-функции на компоненте алгебраической кривой кратности μ назовем число $k\mu$, где k – кратность для ростка (1).

Теорема 1′ (о многоугольниках Ньютона). *На нормализации* $\overline{\Gamma}$ *кривой* Γ, *заданной в* $\mathbb{C}^{*2}$ *уравнением* $P(x,y)=0$, *существуют точки, в которых вектор-функция* (x,y) *имеет тип* $\vec{n}\neq 0$, *если и только если на многоугольнике*

Ньютона $\Delta(P)$ минимум скалярного произведения с вектором $\vec{n}$ достигается на стороне этого многоугольника. Более того, посчитанное с учетом полных кратностей число точек, в которых вектор-функция (x,y) имеет тип $\vec{n}$, а ее приведенное число Вейля является заданным числом ξ_0, равно порядку $\operatorname{ord}_{\xi_0} P_{\vec{n}}$ полинома $P_{\vec{n}}$ в точке ξ_0.

Теорема $1'$ автоматически вытекает из теоремы 1. Дело в том, что полином Лорана P разлагается в произведение неприводимых полиномов Лорана, для которых справедлива теорема 1.

§ 3. Параметризация одномерных орбит на торической поверхности

Многогранники Ньютона, как известно, теснейшим образом связаны с торическими компактификациями тора [4].

Двумерная ситуация специальна. Группа $\mathbb{C}^*$ имеет только один нетривиальный автоморфизм (при котором точка t переходит в точку t^{-1}). Специфика двумерного тора заключается в существовании одновременно естественного выбора параметризации на каждой его связной фактор-группе размерности 1. Эта параметризация зависит лишь от ориентации плоскости однопараметрических групп и меняется на противоположную при смене ориентации. Определим эту параметризацию. Фиксируем ориентацию плоскости однопараметрических. Пусть $O_{\vec{b}}$ – однопараметрическая подгруппа в $\mathbb{C}^{*2}$, соответствующая вектору $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $\vec{b} \neq 0$. (Такая группа определяется гомоморфизмом стандартной группы $\mathbb{C}^*$ в группу $\mathbb{C}^{*2}$, переводящим точку τ в точку $\tau^{\vec{b}} = (\tau^{b_1}, \tau^{b_2})$.) Обозначим через $\pi_{\vec{b}}$ проекцию группы $\mathbb{C}^{*2}$ на фактор-группу группы $\mathbb{C}^{*2}$ по подгруппе $O_{\vec{b}}$.

Определение. Параметризацию t фактор-группы $\mathbb{C}^{*2}/O_{\vec{b}}$ будем называть *параметризацией, согласованной* с ориентацией плоскости однопараметрических, если для любого целочисленного вектора $\vec{m}$ такого, что пара векторов $(\vec{b}, \vec{m})$ задает правильную ориентацию плоскости однопараметрических, справедливо равенство

$$\lim_{\tau \to 0} t\big(\pi_{\vec{b}}(\tau^{\vec{m}})\big) = 0.$$

Несложно проверить, что параметризация, согласованная с ориентацией плоскости однопараметрических, действительно существует. Опишем ее в координатах. Рассмотрим стандартный двумерный тор $\mathbb{C}^{*2}$ с координатными функциями (x,y) и со стандартной ориентацией плоскости однопараметрических. Пусть $\vec{b} = (b_1, b_2)$ – не равный нулю целочисленный вектор, $\vec{n} = (n_1, n_2)$ – несократимый целочисленный вектор такой, что $\vec{b} = k\vec{n}$, где k – натуральное число, и $\pi_{\vec{b}}$ – проекция $\mathbb{C}^{*2}$ на фактор-группу $\mathbb{C}^{*2}/O_{\vec{b}}$.

Легко проверяется следующая

Лемма. *Отображение, сопоставляющее точке $c \in \mathbb{C}^{*2}$ параметр t точки $\pi_{\vec{b}}(c)$ при описанной выше параметризации фактор-группы, задается формулой $t = c_2^{n_1} c_1^{-n_2}$, где $c = (c_1, c_2)$, $\vec{n} = (n_1, n_2)$.*

Фиксация изоморфизма одномерных фактор-групп тора $\mathbb{C}^{*2}$ с группой $\mathbb{C}^*$ имеет следующее последствие.

Утверждение 1. *На всякой торической поверхности существует естественная параметризация каждой одномерный орбиты, зависящая лишь от ориентации плоскости однопараметрических.*

Доказательство. Действительно, пусть $M_\infty^{\vec{n}}$ – одномерная орбита, соответствующая лучу, порожденному вектором $\vec{n}$ в веере этой поверхности (см. [3], [7]). Точки тора $\mathbb{C}^{*2}$ стремятся к этой орбите при действии однопараметрической $t^{\vec{n}}$ при $t \to 0$. Орбита $M_\infty^{\vec{n}}$ естественно изоморфна фактор-группе тора $\mathbb{C}^{*2}$ по подгруппе $t^{\vec{n}}$. Описанная выше параметризация этой фактор-группы задает естественную параметризацию орбиты.

Связь этой торической конструкции с числами Вейля следующая. Пусть $f = c_1u^{b_1} + \cdots$, $g = c_2u^{b_2} + \cdots$ – росток мероморфного отображения кривой (Γ, a) в тор $\mathbb{C}^{*2}$. Пусть $\vec{b} = k\vec{n}$, $k > 0$, и $M^{\vec{n}} \supset \mathbb{C}^{*2}$ – торическая поверхность, веер которой является лучом, порожденным вектором $\vec{n}$. Поверхность $M^{\vec{n}}$ содержит ровно одну одномерную орбиту $M_\infty^{\vec{n}}$. Порядок компонент f и g в вектор-функции (f, g) фиксирует ориентацию плоскости и, следовательно, фиксирует параметризацию одномерной орбиты $M_\infty^{\vec{n}}$.

Утверждение 2. *Росток мероморфного отображения $(f, g)\colon \Gamma \to \mathbb{C}^{*2}$ продолжается до ростка аналитического отображения $(\widetilde{f}, \widetilde{g})\colon \Gamma \to M^{\vec{n}}$. Точка a при этом аналитическом отображении переходит в точку одномерной орбиты $M_\infty^{\vec{n}}$ с параметром t, равным приведенному числу Вейля $[f, g]_a$. Образ кривой Γ пересекается с орбитой $M_\infty^{\vec{n}}$ с кратностью k, равной кратности ростка (f, g).*

Доказательство. Действительно, при $u \to 0$ точка $(c_1u^{b_1} + \cdots, c_2u^{b_2} + \cdots)$ будет стремиться к точке на орбите $M_\infty^{\vec{n}}$, параметр которой по лемме равен $c_2^{n_1}c_1^{-n_2}$. Это число равно приведенному числу Вейля. Остальные факты из утверждения легко проверяются.

§ 4. Кривые на торической поверхности

Пусть M – компактная торическая поверхность, возможно, имеющая особенности в точках, являющихся нульмерными орбитами. Пусть на объединении M_∞ одномерных орбит поверхности M фиксировано конечное число точек с заданными положительными кратностями. Существует ли кривая на поверхности M, не проходящая через нульмерные орбиты и пересекающая одномерные орбиты в фиксированных точках с заданными кратностями? Здесь предлагается полный ответ на этот вопрос.

Для формулировки ответа, прежде всего, закодируем дивизоры D, носители которых лежат в объединении одномерных орбит поверхности M, при помощи определяемой ниже функции

$$\mathrm{Mul}_D\colon \mathbb{Z}_{ik}^2 \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{N}_+.$$

Фиксируем ориентацию в плоскости однопараметрических тора $\mathbb{C}^{*2}$. Фиксация этой ориентации задает параметризацию каждой одномерной орбиты на любой торической компактификации M тора $\mathbb{C}^{*2}$. Пусть вектор $\vec{n} \in \mathbb{Z}_{\mathrm{ir}}^2$ соответствует одномерной орбите $M_\infty^{\vec{n}}$ на поверхности M. В этом случае положим функцию $\mathrm{Mul}_D(\vec{n}, c)$ равной кратности, с которой точка с параметром c на одномерной орбите $M_{\infty}^{\vec{n}}$ входит в дивизор D. Если вектор $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$ соответствует нульмерной орбите на поверхности M, то положим функцию $\mathrm{Mul}_D(\vec{n}, c)$ равной нулю для всех точек $c \in \mathbb{C}^*$.

Теорема. *Дивизор D является дивизором пересечения некоторой кривой, не проходящей через нульмерные орбиты торической поверхности M, с объединением M_∞ одномерных орбит поверхности M, если и только если эта кривая является замыканием кривой, определенной в $\mathbb{C}^{*2}$ уравнением $P = 0$, причем функция Mul_P полинома Лорана P равна функции Mul_D дивизора D: $\mathrm{Mul}_P = \mathrm{Mul}_D$.*

Доказательство. Торическая поверхность M содержит тор $\mathbb{C}^{*2}$. Всякая алгебраическая кривая, лежащая на поверхности M и не содержащая одномерных орбит в качестве компонент, является замыканием кривой, лежащей в торе $\mathbb{C}^{2*}$. Каждая кривая в $\mathbb{C}^{2*}$ задается некоторым уравнением $P = 0$, где P – полином Лорана. Рассмотрим функцию Mul_P, построенную по этому полиному Лорана. Если вектор $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$ в веере поверхности M соответствует нульмерной орбите A, то функция $\mathrm{Mul}_P(\vec{n}, \cdot)$ должна тождественно обращаться в нуль на $\mathbb{C}^*$. В противном случае, как видно из теоремы $1'$ о многоугольниках Ньютона, замыкание в поверхности M кривой $P = 0$ будет содержать нульмерную орбиту A. Пусть вектор $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$ в веере поверхности M соответствует одномерной орбите $M_{\infty}^{\vec{n}}$. Тогда согласно теореме $1'$ о многоугольниках Ньютона и утверждению 2 из § 3, замыкание кривой $P = 0$ пересекает орбиту $M_{\infty}^{\vec{n}}$ только в точках, параметры которых являются корнями полинома $P_{\vec{n}}$. При этом кратность точки пересечения равна кратности соответствующего корня полинома $P_{\vec{n}}$. Теорема доказана.

Подведем итог. Пусть носитель дивизора D лежит не более чем на двух орбитах. Тогда искомая кривая существует, если и только если

1) этих орбит ровно две и им соответствуют противоположные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 = 0$;
2) точка на орбите $M_{\infty}^{\vec{n}_1}$ с параметром c входит в дивизор D с той же кратностью, с которой в него входит точка с параметром c^{-1} на орбите $M_{\infty}^{\vec{n}_2}$.

Пусть дивизор D содержится в объединении не менее чем трех одномерных орбит. Тогда искомая кривая существует, если и только если выполнены

1) условие Паскаля $\sum \mathrm{Mul}_D(\vec{n}, c) = 0$;
2) условие Виета $\prod (-c)^{\mathrm{Mul}_D(\vec{n}, c)} = 1$.

Если условия 1)–2) выполнены, то искомая кривая Γ задается следующим образом. По функции Mul_D строится многоугольник Ньютона Δ_D, для которого

$$\mathrm{Lengh}_{\Delta_D}(\vec{n}) = \sum_c \mathrm{Mul}_D(\vec{n}, c).$$

Такой многоугольник определен однозначно с точностью до параллельного переноса. Далее, у полинома Лорана P выделяются коэффициенты при всех мономах, соответствующих граничным точкам многоугольника Δ. Эти коэффициенты определяются однозначно, с точностью до общего множителя, из условия, что в точке c порядок полинома $P_{\vec{n}}$ равен $\mathrm{Mul}_D(\vec{n}, c)$. Все остальные коэффициенты полинома Лорана P определяются произвольным образом.

Обозначим через $\mathscr{R}(D)$ пространство всех кривых на поверхности M, не проходящих через нульмерные орбиты и пересекающихся с объединением одномерных орбит по дивизору D. Так как пропорциональные уравнения определяют одну и ту же кривую, $\mathscr{R}(D)$ является проективизацией пространства полиномов Лорана P, для которых $\mathrm{Mul}_P = \mathrm{Mul}_D$.

Пространство Mul_P представляет собой дополнение к точке 0 в линейном пространстве размерности $(B(\Delta) + 1)$, где $B(\Delta)$ – число внутренних целых точек многоугольника Δ, $\Delta_D = \Delta(P)$. (Мы отождествляем полиномы Лорана, частное которых является мономом.) Поэтому пространство $\mathscr{R}(D)$ представляет собой проективное пространство размерности $B(\Delta)$.

§ 5. Многоугольники без внутренних целых точек

Начнем со списка исключительных многоугольников, ни один из которых не содержит внутри себя целых точек.

Список исключительных многоугольников.

1. Отрезок целочисленной длины m. Унимодулярным преобразованием переводится в отрезок с вершинами $(0, 0)$, $(m, 0)$.
2. Треугольник, стороны которого имеют целочисленную длину 2. Унимодулярным преобразованием переводится в симплекс с вершинами $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 0)$.
3. Треугольник целочисленной высоты 1 с целочисленной длиной основания, равной m. Унимодулярным преобразованием переводится в симплекс с вершинами $(0, 0)$, $(m, 0)$, $(1, 0)$.
4. Трапеция целочисленной высоты 1 с целочисленными длинами оснований k, m, где $0 < k \leqslant m$. Целочисленным преобразованием переводится в трапецию с вершинами $(0, 0)$, $(m, 0)$, $(1, 0)$, $(1, k)$.

Теорема. *Если целочисленный многоугольник содержит внутренние целые точки, то для каждой его стороны l существует внутренняя целая точка, целочисленная высота которой относительно стороны l равна* 1. *Все целочисленные многоугольники без внутренних целых точек содержатся в списке исключительных многоугольников.*

Доказательство. Мы покажем, что если целочисленный многоугольник не содержится в списке исключительных многоугольников, то для каждой его стороны l найдется внутренняя целая точка, целочисленная высота которой относительно стороны l равна 1. Отсюда, разумеется, вытекают оба утверждения теоремы. Унимодулярным преобразованием плоскости (u, v) расположим многоугольник Δ так, чтобы он лежал в верхней полуплоскости $v \geqslant 0$, а сторона l лежала на оси $v = 0$. Если пересечение многоугольника Δ с прямой $v = 1$ пусто, то целочисленный многоугольник Δ – отрезок. Если это пересечение состоит из точки, то Δ – треугольник целочисленной высоты 1. Если отрезок $\Delta \cap (v = 1)$ содержит внутреннюю целую точку, то либо эта точка является внутренней точкой многоугольника Δ, целочисленная высота которой относительно стороны l равна 1, либо отрезок $\Delta \cap (v = 1)$ является стороной многоугольника Δ. В последнем случае многоугольник Δ является целочисленной трапецией с целочисленной высотой, равной 1. Покажем, что если отрезок $\Delta \cap (v = 1)$

не содержит внутренней целой точки, то многоугольник Δ содержится в списке исключительных многоугольников. Действительно, в этом случае отрезок $\Delta \cap (v = 1)$ переводится в полосу $0 \leqslant u \leqslant 1$ унимодулярным преобразованием плоскости, оставляющим неподвижными все точки горизонтальной оси координат и переводящим в себя все горизонтальные прямые.

Пусть отрезок $\Delta \cap (v = 1)$ совпадает с отрезком $(0 \leqslant u \leqslant 1,\ v = 1)$. Здесь возникают следующие случаи. Если сторона l имеет длину 1, то многоугольник Δ лежит в полосе $0 \leqslant u \leqslant 1$ и является трапецией с целочисленной высотой, равной 1. Если сторона l имеет длину 2, то многогранник Δ является симплексом $(u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ u + v \leqslant 2)$ со сторонами целочисленной длины, равной 2. В рассматриваемом случае не существует целочисленных многоугольников Δ со стороной l длины больше 2.

Если длина отрезка $\Delta \cap (v = 1)$ меньше 1, то встречаются лишь случаи, в которых длина стороны l равна 1, а многоугольник Δ является треугольником целочисленной высоты, равной 1 (с вершиной, расположенной либо на прямой $u = 0$, либо на прямой $u = 1$). Теорема доказана.

§ 6. Многоугольник Δ_D с внутренней целой точкой

В этом параграфе описывается общая кривая из пространства $\mathscr{R}(D)$ (см. § 4) в том случае, когда многоугольник Δ_D содержит внутреннюю целую точку.

Лемма. *Пусть точка a лежит на одномерной орбите $M_\infty^{\vec{n}}$ поверхности M и входит в дивизор D с кратностью $k(a)$. Пусть дивизор D допустим и многоугольник Δ_D содержит внутреннюю целую точку. Тогда общая кривая Γ из пространства $\mathscr{R}(D)$ около точки a является гладкой, причем кривая Γ касается орбиты $M_\infty^{\vec{n}}$ с кратностью касания $k(a)$.*

Доказательство. Пусть c – параметр точки a на орбите $M^{\vec{n}}$, и пусть $P = 0$ – уравнение кривой в $\mathbb{C}^{*2}$, где $\mathrm{Mul}_P = \mathrm{Mul}_D$.

Сделаем унимодулярное степенное преобразование тора $\mathbb{C}^{*2}$, переводящее вектор $\vec{n}$ в вектор $\vec{e}_1$. После такого преобразования и сокращения уравнения на подходящий моном уравнение $P = 0$ будет иметь следующие свойства:

1) полином Лорана P будет регулярен в плоскости (x, y) вне оси $(y = 0)$;
2) его ограничение $P(0, y)$ на ось $(x = 0)$ будет совпадать с полиномом $P_{\vec{n}}(y)$.

В координатах (x, y) ось $(x = 0)$ совпадает с орбитой $M_\infty^{\vec{n}}$, а точка a – с точкой $(0, c)$. Если полином $P_{\vec{n}}$ имеет в точке c корень кратности 1, то лемма вытекает из теоремы о неявной функции. Пусть c – корень полинома $P_{\vec{n}}$ кратности $\geqslant 2$. Согласно теореме из § 5, внутри многоугольника Ньютона Δ находится целая точка с координатами $(1, k)$, где k – некоторое целое число.

Поэтому при любых значениях параметра λ полином $P_\lambda = P + \lambda x y^k$ лежит в рассматриваемом пространстве, т.е. $\mathrm{Mul}_{P_\lambda} = \mathrm{Mul}_D$. Если $\lambda \neq -c^{-k}\dfrac{\partial P}{\partial y}(0, c)$, то к уравнению $P_\lambda = 0$ около точки $(0, c)$ применима теорема о неявной функции. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть дивизор D допустим, а его многоугольник Ньютона Δ содержит внутреннюю целую точку. Тогда общая кривая из пространства $\mathscr{R}(D)$*

является гладкой неприводимой кривой рода $g = B(\Delta)$, где $B(\Delta)$ – число внутренних точек многоугольника Δ. Пересечение общей кривой из пространства $\mathscr{R}(\Delta)$ с тором $\mathbb{C}^{*2}$ является сферой с g ручками, из которой выколото q точек, где q – число геометрически различных точек в носителе дивизора D.

Доказательство. Общее уравнение $P = 0$, где $\mathrm{Mul}_P = \mathrm{Mul}_D$, задает неособую кривую в торе $\mathbb{C}^{*2}$. Действительно, пусть точка (k, m) – внутренняя для многоугольника Δ. Перепишем уравнение $P(x, y) = 0$ в виде $\widetilde{P}x^{-k}y^{-m} = \lambda$, где $\widetilde{P} = P - \lambda x^k y^m$. По теореме Сарда–Бертини для почти всех значений параметра λ кривая $\widetilde{P}x^{-k}y^{-m} = \lambda$ будет неособой. Согласно лемме общая кривая из пространства $\mathscr{R}(D)$ будет неособой и в точках пересечения с одномерными орбитами поверхности M. Поэтому общая кривая из пространства $\mathscr{R}(D)$ вообще не имеет особых точек. По теореме о неявной функции малое изменение коэффициентов уравнения гладкой кривой не меняет топологию этой кривой. Немного меняя коэффициенты при всех мономах, можно добиться, чтобы уравнение стало Δ-невырожденным. Применяя хорошо известные результаты о Δ-невырожденных кривых [5], получим, что общая кривая $\mathscr{R}(D)$ будет неприводимой и что ее род равен $B(\Delta)$. Число геометрически различных точек пересечения гладкой кривой из пространства $\mathscr{R}(D)$ с объединением одномерных орбит равно числу геометрически различных точек в дивизоре D.

§ 7. Многоугольник Δ_D без внутренних целых точек

Пусть дивизор D на объединении одномерных орбит торической поверхности M допустим и его многоугольник Ньютона Δ_D не содержит внутренних целых точек. Полное описание этого случая основано на полном перечислении многоугольников без внутренних целых точек (см. § 5). Если $\Delta(D)$ не имеет внутренних целых точек, то существует с точностью до множителя лишь один полином Лорана P такой, что $\mathrm{Mul}_P = \mathrm{Mul}_\Delta$, и одна единственная кривая в пространстве $\mathscr{R}(D)$. Будем обозначать эту кривую $r(D)$.

Теорема 1. *При помощи степенной унимодулярной замены координат и умножения на моном полином Лорана P можно привести либо к многочлену степени m с ненулевым свободным членом, не зависящему от первой координатной функции, либо к квадратному полиному с ненулевым свободным членом и с ненулевыми коэффициентами при x^2 и при y^2, либо к полиному $yS_k(x)+Q_m(x)$, где S_k и Q_m – многочлены степеней k и m, $m > 0$, $m \geqslant k \geqslant 0$, с ненулевыми свободными членами.*

Доказательство теоремы немедленно вытекает из рассмотрения списка многоугольников без внутренних целых точек (см. § 5).

Предположим дополнительно, что уравнение $P = 0$ неприводимо. Тогда после степенной замены координат в первом случае оно определяет горизонтальную прямую, во втором случае – гладкую квадрику, а в третьем случае – график рациональной функции. Мы видим, что неприводимая кривая $r(D)$ ведет себя в точности как общая кривая из пространства $\mathscr{R}(D)$ в случае, когда многоугольник Δ_D имеет внутренние целые точки.

Теорема 2. *Пусть дивизор D допустим и его многоугольник Ньютона Δ не содержит внутренних целых точек. Пусть дополнительно единственная кривая $r(D)$ в пространстве $\mathscr{R}(D)$ неприводима. Тогда она является гладкой рациональной кривой на поверхности M. Если дивизор D содержит точку a с кратностью $k(a)$, то кривая $r(D)$ в точке a касается с кратностью $k(a)$ с одномерной орбитой, проходящей через точку a.*

Нам осталось описать в терминах дивизора D условия приводимости кривой и посмотреть, что происходит в этом случае.

Случай отрезка. Пусть функция Mul_D дивизора D имеет ровно два характеристических вектора $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ таких, что $\vec{n}_1+\vec{n}_2=0$, и обладает свойством возвратности $\mathrm{Mul}_D(\vec{n}_1,c)=\mathrm{Mul}_D(\vec{n}_2,c^{-1})$.

Многоугольник Ньютона Δ_D в этом случае является отрезком. Для описания кривой $r(D)$ сделаем унимодулярный автоморфизм тора $\mathbb{C}^{*2}\subset M$, переводящий вектор $\vec{n}_1$ из алгебры Ли тора $\mathbb{C}^{*2}$ в вектор $\vec{e}_1$, где $\vec{e}_1=(1,0)$. После такого преобразования кривая $r(D)$ в $\mathbb{C}^{*2}$ с координатами (x,y) будет состоять из объединения горизонтальных прямых $y=c_i$, причем прямая $y=c_i$ входит в кривую $r(D)$ с той же кратностью, с которой точка с параметром c_i на орбите $M^{\vec{n}_1}$ входит в дивизор D.

В частности, *кривая $r(D)$ не содержит кратных компонент, если и только если функция Mul_D принимает лишь значения 0 и 1. Кривая $r(D)$ некратна и неприводима, если и только если функция Mul_D равна 1 ровно в двух точках $(\vec{n}_1,c)$ и $(-\vec{n}_1,c^{-1})$ и равна нулю во всех остальных точках.*

Переходим к случаю двумерных многоугольников Δ_D. Допустимые дивизоры D в этом случае удовлетворяют условию Виета. Комбинаторные типы многоугольников Δ в рассматриваемых ниже случаях различаются, и условие Паскаля принимает разные формы.

Случай симплекса со сторонами целочисленной длины 2. В рассматриваемом случае дивизор D содержит по 2 точки (с учетом кратности) на трех орбитах, соответствующих векторам $\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3$. Условие Паскаля принимает следующий вид:

$$\vec{n}_1+\vec{n}_2+\vec{n}_3=0.$$

Утверждение 1. *Кривая $r(D)$ приводима, если и только если в носителе дивизора D можно выбрать по одной точке на каждой из трех орбит так, чтобы произведение их параметров равнялось (-1). В этом случае кривая состоит из двух компонент. Эти компоненты сливаются в кратную компоненту, если и только если все точки дивизора дополнительно являются кратными. Если же эти компоненты являются различными, то они пересекаются ровно в одной точке поверхности M. Эта точка не принадлежит тору $\mathbb{C}^{*2}$, если и только если одна из точек дивизора D является кратной.*

Доказательство. Степенным преобразованием кривая $r(D)$ переводится в квадрику. Для квадрики утверждение очевидно.

Замечание. Если допустимый дивизор содержит три двукратных точки, то по условию Виета $[(-\xi_1)(-\xi_2)(-\xi_3)]^2=1$, где ξ_i – параметры этих точек. Возникает два случая.

1) случай $(-\xi_1)(-\xi_2)(-\xi_3)=1$ соответствует одной компоненте кратности два;

2) случай $(-\xi_1)(-\xi_2)(-\xi_3) = -1$ соответствует неособой кривой; степенным преобразованием такую кривую можно перевести в параболу, касающуюся осей координат.

Случай треугольника целочисленной высоты 1. Пусть дивизор D содержит точки на трех орбитах, соответствующих векторам $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$. Пусть на орбите, соответствующей вектору $\vec{n}_1$, дивизор D содержит не меньше точек, чем на любой из оставшихся орбит. Пусть это число точек равняется числу $k \geqslant 1$. Рассматриваемый случай определяется следующими условиями:

1) на каждой из двух оставшихся орбит дивизор имеет ровно по одной точке;
2) справедливы соотношения $k\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 = 0$, $|\det(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = |\det(\vec{n}_1, \vec{n}_3)| = 1$.

При выполнении условий 1)–2) условие допустимости дивизора D состоит в выполнении условия Виета.

Утверждение 2. *При выполнении перечисленных условий кривая $r(D)$ всегда будет неприводимой.*

Доказательство. Треугольник с целочисленной высотой 1 не раскладывается в сумму Минковского целочисленных многоугольников. Полином Лорана с таким многоугольником Ньютона неприводим.

Случай трапеции целочисленной высоты 1. Этот случай появляется в следующих обстоятельствах: дивизор D содержит точки на четырех орбитах, соответствующих векторам $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$, $\vec{n}_4$. На одной из орбит он содержит не меньше точек, чем на других орбитах. Пусть эта орбита соответствует вектору $\vec{n}_1$. Обозначим число точек на ней через m, $m \geqslant 1$. Среди векторов $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$, $\vec{n}_4$ есть вектор $-\vec{n}_1$. Будем считать, что это вектор $\vec{n}_3$. Дивизор должен иметь ровно по одной точке на орбитах, соответствующих векторам $\vec{n}_2$ и $\vec{n}_4$, и некоторое число k, $k \geqslant 1$, точек на орбите, соответствующей вектору $-\vec{n}_1 = \vec{n}_3$. Должны выполняться соотношение Паскаля $m\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + k\vec{n}_3 + \vec{n}_4 = 0$ и соотношение $|\det(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = |\det(\vec{n}_1, \vec{n}_3)| = 1$.

Приведенные дискретные условия эквивалентны условию Паскаля существования трапеции Δ_D и требованию, чтобы трапеция Δ_D не содержала внутренних целых точек. При выполнении этих условий дивизор D будет допустим, если и только если выполнено соотношение Виета.

Разложим теперь дивизор D в линейную комбинацию с неотрицательными целыми коэффициентами некоторых эффективных дивизоров D_i. Пусть $c_1, \dots, c_j$ – параметры геометрически различных точек в носителе дивизора D на орбите, соответствующей вектору $\vec{n}_1$. С каждым номером i, $1 \leqslant i \leqslant j$, свяжем следующий двуточечный дивизор D_i: дивизор содержит точку A_i с параметром c_i на орбите $M_\infty^{\vec{n}_1}$ и точку B_i с параметром c_i^{-1} на орбите $M_\infty^{-\vec{n}_1}$. Положим $k(i)$ равным минимуму из кратностей вхождения в дивизор D точек A_i и B_i. Положим $D_\nu = \sum k(i)D_i$ и $D_0 = D - D_\nu$.

Утверждение 3. *Описанное выше разложение дивизора D в сумму $D = D_0 + \sum k(i)D_i$ соответствует разложению кривой $r(D)$ на неприводимые компоненты*:

$$r(D) = r(D_0) + \sum_{i=1} k(i)r(D_i).$$

Каждая из кривых $r(D_i)$ является гладкой рациональной кривой на торической поверхности M. Кривая $r(D)$ будет неприводима, если и только если все числа $k(i)$ равны 0. Кривая $r(D)$ не содержит кратных компонент, если и только если все числа $k(i)$ меньше 2. При $i > 0$ различные кривые $r(D_i)$ на торической поверхности не пересекаются друг с другом. Каждая из кривых $r(D_i)$ при $i > 0$ пересекается с кривой $r(D_0)$ на поверхности M ровно по одной точке. Эта единственная точка пересечения не лежит в торе $\mathbb{C}^{*2}$, если и только если носители дивизоров D_0 и D_i пересекаются.

Доказательство утверждения сводится к следующему. Полином $yS_k(x) + Q_m(x)$ приводим, если и только если он делится на некоторый полином $G(x)$. Компоненты приведенного выше разложения соответствуют корням c_i полинома $G(x)$, числа k_i – кратностям этих корней. Кривые $r(D_i)$ соответствуют вертикальным линиям $x = c_i$, а кривая $r(D_0)$ – графику рациональной функции $y = S_k(x)/Q_m(x)$ (числитель и знаменатель дроби надо сократить на общий множитель $G(x)$).

§ 8. Мероморфные векторные функции на компактных кривых

Рассмотрим тройку Γ, f, g, состоящую из компактной (не обязательно связной) кривой Γ и мероморфной вектор-функции (f, g) на ней. Мы всегда будем предполагать, что ни на какой компоненте связности кривой Γ

1) ни одна из функций f, g не обращается в тождественный нуль,
2) вектор-функция (f, g) не является постоянной.

С каждой тройкой Γ, f, g свяжем функцию $\mathrm{Mul}_{\Gamma fg}$ на произведении $\mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}} \times \mathbb{C}^*$, сопоставляющую несократимому вектору $\vec{n}$ и ненулевому комплексному числу c сумму кратностей ростков во всех точках на кривой Γ, в которых росток вектор-функции имеет тип $\vec{n}$, а приведенное число Вейля этого ростка равно c (см. § 2). Другими словами,

$$\mathrm{Mul}_{\Gamma fg}(\vec{n}, c) = \sum_a k(a),$$

где суммирование ведется по всем точкам a, в которых тип ростка (f, g) равен $\vec{n}$ и $[f, g]_a = c$.

Настоящий параграф посвящен решению следующих задач 1–3.

Задача 1. *Дана функция* Mul *на* $\mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}} \times \mathbb{C}^*$, *принимающая целые неотрицательные значения и равная нулю всюду кроме конечного числа точек. Найти тройки* Γ, f, g, *для которых* $\mathrm{Mul}_{\Gamma fg}$ *равна* Mul.

Решения задачи 1 делятся на кратные и некратные. Скажем, что тройка Γ, f, g является *некратной*, если вектор-функция (f, g) склеивает не более чем конечное число точек на кривой Γ.

Задача 1 имеет следующие варианты.

Задача 2. *Найти некратные решения задачи* 1.

Задача 3. *Найти некратные решения* Γ, f, g *задачи* 1, *для которых кривая* Γ *связна.*

Лемма 1. *Пусть* $\pi\colon (\Upsilon, b) \to (\Gamma, a)$ – *росток l-листного отображения кривой Υ в кривую Γ и (f, g) – росток мероморфной вектор-функции в точке $a \in \Gamma$. Тогда росток $(\pi^* f, \pi^* g)$ мероморфной вектор-функции в точке $b \in \Upsilon$ имеет тот же тип, что и росток (f, g), а его кратность в l раз больше, чем кратность ростка (f, g). Справедливы равенства*:

1) $[\pi^* f, \pi^* g]_b = [f, g]_a$,
2) $\{\pi^* f, \pi^* g\}_b = \{f, g\}_a^l$.

Доказательство. Можно так выбрать локальные параметры u и v на ростках кривых Γ и Υ, что отображение π будет задаваться формулой $\pi(v) = v^l = u$. При этом если $f = c_1 u^{b_1} + \cdots$, $g = c_2 u^{b_2} + \cdots$, то $\pi^* f = c_1 v^{l b_1} + \cdots$, $\pi^* g = c_2 v^{l b_2} + \cdots$. Откуда и вытекают нужные равенства.

Пусть кривая Γ состоит из компонент связности $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$. С каждой тройкой Γ, f, g связано k троек $\Gamma_1, f, g; \ldots; \Gamma_k, f, g$. (Мы обозначаем одним и тем же символом функцию на кривой Γ и ограничение этой функции на компоненту связности Γ_i этой кривой.) Пусть $\pi\colon \Upsilon \to \Gamma$ – разветвленное накрытие кривой Υ над кривой Γ, при котором число точек в прообразе $\pi^{-1}(a)$ общей точки a на компоненте Γ_i равно μ_i (мы не предполагаем, что полный прообраз $\pi^{-1}(\Gamma_i)$ компоненты Γ_i связен).

Лемма 2. *Справедливо равенство*:

$$\mathrm{Mul}_{\Upsilon F G} = \sum \mu_i \, \mathrm{Mul}_{\Gamma_i f g},$$

где $F = \pi^* f$ и $G = \pi^* g$.

Лемма 2 немедленно вытекает из леммы 1.

Тройке Υ, F, G сопоставим плоскую кривую Γ^{geom}, являющуюся замыканием образа кривой Υ в торе $\mathbb{C}^{*2}$ при мероморфном отображении, переводящем точку a в точку $(F(a), G(a))$.

Для каждой неприводимой компоненты этой кривой определена ее *кратность* μ_i, равная числу прообразов у общей точки на рассматриваемой компоненте при отображении $(F, G)\colon \Upsilon \to \mathbb{C}^{*2}$.

Плоскую алгебраическую кривую Γ^{alg}, геометрически совпадающую с кривой Γ^{geom}, но в которой каждая ее компонента рассматривается с кратностью μ_i, назовем *характеристической плоской кривой* для тройки Υ, F, G.

Полином Лорана $P(x, y) = \prod P_i^{\mu_i}(x, y)$, где $P_i(x, y)$ – неприводимый полином Лорана, равный нулю на i-й компоненте, и μ_i – кратность этой компоненты, назовем *характеристическим полиномом* Лорана для тройки Υ, F, G. Характеристический полином определен с точностью до умножения на ненулевую константу (мы отождествляем два полинома Лорана, частное которых является мономом). Кривая Γ^{alg} задается уравнением $P = 0$.

Нормализация $\overline{\Gamma}$ характеристической кривой Γ^{geom} состоит из компонент $\overline{\Gamma}_i$, являющихся нормализациями компонент Γ_i^{geom} характеристической кривой. На нормализации $\overline{\Gamma}$ определена мероморфная вектор-функция $(x, y)\colon \overline{\Gamma} \to \mathbb{C}^{*2}$, задающая ее бирациональный изоморфизм с кривой Γ^{geom}.

Теорема 1. *Пусть* $\pi\colon \Upsilon \to \overline{\Gamma}$ *– разветвленное накрытие над нормализацией кривой* Γ^{geom} *такое, что число прообразов общей точки на компоненте* $\overline{\Gamma}_i$ *равно кратности* μ_i *этой компоненты. Тогда характеристическая кривая для тройки* Υ, F, G*, где* $F = \pi^* x$ *и* $G = \pi^* y$*, совпадает с кривой* Γ^{alg}*. Обратно, если характеристическая кривая для тройки* Υ, F, G *совпадает с кривой* Γ^{alg}*, то существует разветвленное накрытие* $\pi\colon \Upsilon \to \overline{\Gamma}$ *такое, что* $F = \pi^* x$*,* $G = \pi^* y$*, и число прообразов общей точки на компоненте* $\overline{\Gamma}_i$ *равно кратности* μ_i *компоненты* Γ_i^{geom} *в* Γ^{geom}*.*

Теорема 1 непосредственно вытекает из определений.

Следствие 1. *Если характеристическая кривая не имеет кратных компонент, то тройка* Υ, F, G *однозначно с точностью до изоморфизма определяется характеристической кривой. Ею является нормализация характеристической кривой вместе с вектор-функцией* (x, y) *на ней.*

Следствие 1 вытекает из теоремы 1, так как в рассматриваемом случае разветвленное накрытие является изоморфизмом.

Следствие 2. *Если характеристическая кривая имеет кратные компоненты, то тройка* Υ, F, G *однозначно восстанавливается после фиксации следующих данных: набора любых конечных множеств* A_i *на неприводимых компонентах* $\overline{\Gamma}_i$ *нормализации характеристической кривой, имеющих кратности* $\mu_i \geqslant 2$*, и гомоморфизмов фундаментальных групп* $\pi_1(\overline{\Gamma}_i \setminus A_i)$ *в группы перестановок* μ_i *элементов.*

Следствие 2 вытекает из теоремы 1 и классификации разветвленных накрытий. Следствие 2 показывает, что существуют многопараметрические семейства различных троек Υ, F, G с заданной характеристической кривой, имеющей кратные компоненты. Непрерывными параметрами являются множества точек ветвления A_i на кратных компонентах, которые можно выбирать произвольно (и которые могут содержать любое число точек).

Теорема 2. *Для всякой тройки* Υ, F, G *справедливо равенство*

$$\mathrm{Mul}_{\Upsilon FG} = \mathrm{Mul}_P,$$

где P *– характеристический полином Лорана тройки* Υ, F, G*.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой $1'$ о многоугольниках Ньютона для уравнения $P = 0$ характеристической кривой тройкиΥ, F, G и теоремой 1 из этого параграфа.

Мы имеем теперь полное решение задачи 1.

Действительно, мы знаем условия на функцию Mul, необходимые и достаточные для того, чтобы она являлась функцией Mul_P некоторого полинома Лорана P. С каждым решением P задачи $\mathrm{Mul}_P = \mathrm{Mul}$ связаны решения задачи 1, для которых кривая $P = 0$ в $\mathbb{C}^{*2}$ является характеристической. Если кривая $P = 0$ не имеет кратных компонент, с ней связана ровно одна с точностью до изоморфизма тройка, решающая задачу 1. Именно, такой тройкой является нормализация характеристической кривой вместе с вектор-функцией (x, y) на ней (см. следствие 1). Если же кривая $P = 0$

содержит кратные компоненты, с ней связано много решений задачи 1, но все они являются кратными. Каждая тройка с характеристической кривой $P = 0$ получается из накрытия над характеристической кривой. Множество таких накрытий содержит бесконечное число компонент растущей размерности (см. следствие 2).

Перейдем теперь к задачам 2 и 3. Согласно теоремам 1 и 2, решение задачи 2 (задачи 3) связано с полиномами Лорана P без кратных множителей (с неприводимыми полиномами Лорана P) такими, что $\mathrm{Mul}_P = \mathrm{Mul}$. Решения задачи 2 (задачи 3) доставляют нормализации кривых $P = 0$ вместе с вектор-функциями (x, y) на них.

Остановимся на возникающих здесь случаях.

1. *Случай, когда* $\Delta(\mathrm{Mul})$ *содержит внутреннюю целую точку.*

Пусть для функции Mul выполнены условия существования полинома Лорана P такого, что $\mathrm{Mul}_P = \mathrm{Mul}$, причем многоугольник $\Delta(\mathrm{Mul})$ содержит внутреннюю целую точку. Тогда для общего полинома Лорана P такого, что $\mathrm{Mul}_P = \mathrm{Mul}$, кривая $P = 0$ в $\mathbb{C}^{*2}$ будет связной и неособой кривой (см. §6). Поэтому в этом случае из разрешимости задачи 1 следует разрешимость как задачи 2, так и задачи 3. Решения этих задач образуют комплексные многообразия размерностей $B(\Delta)$, где $B(\Delta)$ – число внутренних точек многоугольника $\Delta(\mathrm{Mul})$.

2. *Случай, когда* $\Delta(\mathrm{Mul})$ *не содержит внутренней целой точки.*

Если задача нахождения полинома Лорана такого, что $\mathrm{Mul}_P = \mathrm{Mul}$, разрешима, то она имеет единственное с точностью до обратимого множителя решение. При этом если соответствующий полином Лорана P неприводим, то кривая $P = 0$ вместе с вектор-функцией (x, y) доставляет единственное решение задач 1–3. Если соответствующий полином Лорана приводим, но не имеет кратных компонент, то кривая $P = 0$ вместе с вектор-функцией (x, y) доставляет единственное решение задач 1 и 2. Задача 3 в этом случае неразрешима.

Если кривая $P = 0$ имеет кратные компоненты, то задачи 2 и 3 неразрешимы (а задача 1 имеет бесконечное число решений).

По функции Mul легко узнать, с каким из случаев мы имеем дело (см. §7). Итак, приведены условие разрешимости задач 1, 2 и 3, решения этих задач полностью описаны.

§9. Уточнение теоремы Вейля

Что означают с точки зрения теории функций на кривых условия на функцию Mul, необходимые и достаточные для того, чтобы она была функцией $\mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$?

1. Условие Паскаля $\sum \mathrm{Mul}(\vec{n}, c)\vec{n} = 0$. Условие Паскаля для функции $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$ означает, что степень дивизора как мероморфной функции f, так и g на компактной кривой Γ равна нулю. С точки зрения геометрии кривых выполнение этого условия очевидно. Если оно выполнено, то по функции Mul можно построить многоугольник $\Delta = \Delta(\mathrm{Mul})$.

2. Условие Виета $\sum (-c)^{\mathrm{Mul}(\vec{n}, c)} = 1$. Условие Виета для функции $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$ совпадает со следующей теоремой Вейля.

Теорема Вейля. *Для любой компактной аналитической кривой* Γ *и двух ме-*

роморфных функций f, g на ней справедливо соотношение

$$\prod_{a\in\Gamma}\{f,g\}_a = 1.$$

Тем самым, мы, во-первых, доказали теорему Вейля. Во-вторых, мы показали, что при выполнении дискретного условия Паскаля $\sum \mathrm{Mul}(\vec{n},c) = 0$ в том случае, если многоугольник $\Delta(\mathrm{Mul})$ не является отрезком, теорема Вейля доставляет единственное необходимое условие на существование кривой Γ и вектор-функции (f,g) таких, что $\mathrm{Mul}_{\Gamma fg} = \mathrm{Mul}$.

3. Условие возвратности $\mathrm{Mul}(\vec{n},c) = \mathrm{Mul}(-\vec{n},c^{-1})$. Это условие с необходимостью должно выполняться лишь в специальном случае, когда функция Mul имеет не более двух характеристических векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Мы уже имеем полное описание этого случая. Однако, так как, во-первых, в рассматриваемом специальном случае мы имеем уточнение теоремы Вейля, и так как, во-вторых, полный разбор этого случая с точки зрения теории функций на кривой Γ тоже очень прост, мы приведем его ниже.

Скажем, что тройка Γ, f, g *исключительная*, если существует не более чем два ненулевых вектора, которые являются векторами типа ростка $(f,g)_a$ для какой-либо точки $a \in \Gamma$. Будем говорить, что вектор $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$ является характеристическим для функции $\mathrm{Mul}_{\Gamma fg}$, если существует число $c \in \mathbb{C}^*$ такое, что $\mathrm{Mul}_{\Gamma fg}(\vec{n},c) \neq 0$.

Лемма 1. *Для всякой исключительной тройки Γ, f, g существует ровно два характеристических вектора, и их сумма равна нулю.*

Эта лемма вытекает из условия Паскаля.

Покажем, что случай любой пары характеристических векторов $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_1 + \vec{n}_2 = 0$, сводится к легко описываемому случаю, когда один из них (скажем, вектор $\vec{n}_1$) равен вектору $\vec{e}_1 = (1,0)$. Обозначим через A унимодулярную матрицу такую, что $A\vec{e}_1 = \vec{n}_1$.

Лемма 2. 1) *Тройка Γ, f, g является исключительной тройкой с характеристическими векторами $\vec{n}_1$ и $-\vec{n}_1$, если и только если тройка Γ, F, G, в которой вектор-функция (F,G), полученная степенным преобразованием с матрицей A^{-1} из вектор-функции (f,g), имеет характеристические векторы $\vec{e}_1$ и $-\vec{e}_1$.*

2) *Исключительная тройка Γ, F, G имеет характеристические векторы $\vec{e}_1$, $-\vec{e}_1$, если и только если функция G постоянна на каждой компоненте связности кривой Γ.*

Доказательство. Первое утверждение леммы 2 вытекает из леммы 2 §2. Вектор-функция (F,G) имеет характеристические векторы $\vec{e}_1$, $-\vec{e}_1$, если и только если функция G ни в одной точке кривой не обращается в нуль и не имеет полюсов. Такая функция постоянна на каждой компоненте связности кривой Γ. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Для всякой исключительной тройки Γ, f, g функция* $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_{\Gamma fg}$ *обладает свойством возвратности*

$$\mathrm{Mul}_{\Gamma fg}(\vec{n},c) = \mathrm{Mul}_{\Gamma fg}(-\vec{n},c^{-1}). \tag{$*$}$$

Доказательство. 1) Пусть кривая Γ связна и функция g равна константе: $g \equiv c$. Тогда в нулях a функции f имеем $[f,c]_a = c$, поэтому функция $\mathrm{Mul}_{\Gamma fg}$ на паре $(\vec{e}_1, c)$ равна $\deg f$. В полюсах функции f имеем $[f,c]_c = c^{-1}$, поэтому функция $\mathrm{Mul}_{\Gamma fg}$ на паре $(-\vec{e}_1, c^{-1})$ равна $\deg f$. Во всех остальных точках функция $\mathrm{Mul}_{\Gamma fg}$ равна нулю.

2) Лемма 2 сводит общий случай к случаю, рассмотренному в пункте 1).

Теорема 2. *Пусть функция* Mul *с характеристическими векторами* $\vec{n}_1$, $-\vec{n}_1$ *обладает свойством возвратности и функция* $\varphi(c) = \mathrm{Mul}(\vec{n}_1, c)$ *отлична от нуля в точках* $c_1, \dots, c_m$, *причем* $\varphi(c_i) = k_i$. *Тройки* Γ, f, g, *для которых* $\mathrm{Mul}_{\Gamma fg} = \mathrm{Mul}$, *находятся во взаимнооднозначном соответствии с наборами из* m *разветвленных накрытий над сферой Римана* $\pi_i \colon \Gamma_i \to \overline{\mathbb{C}}$ *степеней* k_i (*кривые* Γ_i *не обязательно связны*). *При этом набору накрытий соответствует следующая тройка* Γ, f, g. *Пусть* Γ, F, G – *тройка, в которой кривая* $\Gamma = \cup\Gamma_i$, *а* (F, G) – *вектор-функция, ограничение которой на кривую* Γ_i *равно вектор-функции* (c_i, π_i). *Тройка* Γ, f, g – *степенное преобразование тройки* Γ, F, G *с такой унимодулярной матрицей* A, *что* $A\vec{e}_1 = \vec{n}_1$.

Доказательство теоремы 2 вытекает из леммы 2 и вычисления функции $\mathrm{Mul}_{\Gamma fg}$ для тройки, в которой кривая Γ связна, а функция g постоянна (см. п. 1) доказательства теоремы 1).

Следствие. 1. *Для всякой ненулевой исключительной функции* Mul, *обладающей свойством возвратности, существуют тройки* Γ, f, g, *для которых* $\mathrm{Mul}_{\Gamma fg} = \mathrm{Mul}$.

2. *При этом некратные тройки* Γ, f, g *существуют, если и только если все ненулевые значения функции* Mul *равны* 1. *Для каждой такой функции* Mul *существует ровно одна тройка* Γ, f, g.

3. *Некратная тройка* Γ, f, g, *в которой кривая* Γ *связна, существует, если и только если функция* Mul *отлична от нуля ровно в двух точках и равна в этих точках* 1.

Мы повторили разбор исключительного случая, не прибегая явно к многоугольникам Ньютона, а используя лишь простейшие свойства мероморфных функций на компактных кривых.

§ 10. Теорема Абеля и соотношение Виета

Пусть D – дивизор, лежащий на объединении одномерных орбит M_∞ торической поверхности M. Среди условий существования кривой, пересекающей M_∞ по дивизору D, есть непрерывное условие Виета (см. § 4). Обычно непрерывное условие такого рода возникает из теорем типа теоремы Абеля (см. [6]). В этом параграфе мы приводим простейший вариант теоремы Абеля, тесно связанный с соотношением Виета.

Пусть на компактной (не обязательно связной) кривой Λ задан конечный набор $\{A_i\}$ непересекающихся конечных множеств $A_1, \dots, A_m$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Скажем, что мероморфная форма ω на кривой Λ является $\{A_i\}$-*регулярной*, если

1) форма ω регулярна на дополнении кривой Λ к множеству $\bigcup_{i=1}^m A_i$,
2) форма ω имеет полюса не выше первого порядка в точках множества $\bigcup_{i=1}^m A_i$,

3) для каждого множества A_i сумма вычетов формы ω по точкам множества A_i равна 0.

Скажем, что мероморфная функция φ на кривой Λ является $\{A_i\}$-*мероморфной*, если функция φ принимает одно и то же значение (возможно, равное ∞) во всех точках множества A_i, т.е. при $i = 1, \dots, m$, если $a, b \in A_i$, то $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Теорема 1 (вариант теоремы Абеля). *След $\{A_i\}$-регулярной формы ω при $\{A_i\}$-мероморфном отображении $\varphi\colon \Lambda \to \mathbb{C}$ тождественно равен нулю.*

Доказательство. Начнем с локального вычисления. Пусть $\varphi(u) = u^k$ и $\omega = a\dfrac{du}{u} + \omega_1$, где ω_1 – голоморфная форма. Тогда след формы ω имеет полюс первого порядка с тем же вычетом, что и у формы ω. Действительно, пусть $v = u^k$, $v^{1/k}$ – ветвь корня, и ε_i, $i = 1, \dots, k$, – корни k-й степени из 1. Тогда

$$\operatorname{Tr}\omega = \operatorname{Tr}\omega_1 + a\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\left(\frac{\frac{1}{k}\varepsilon_i v^{1/k-1}}{\varepsilon_i v^{1/k}}\right)dv = \operatorname{Tr}\omega_1 + a\frac{dv}{v}\,.$$

По теореме Абеля след голоморфной формы ω_1 голоморфен.

Из локального вычисления и обычной теоремы Абеля, во-первых, вытекает, что форма $\operatorname{Tr}\omega$ могла бы иметь лишь полюса не выше первого порядка и лишь в точках образа множества $\bigcup A_i$. Во-вторых, из локального вычисления и определения $\{A_i\}$-регулярной формы и $\{A_i\}$-мероморфного отображения вытекает, что форма $\operatorname{Tr}\omega$ вообще не имеет полюсов. Следовательно, $\operatorname{Tr}\omega \equiv 0$.

Как и в обычной теореме Абеля, из равенства нулю следа формы вытекает следующее

Следствие. *Пусть φ есть $\{A_i\}$-мероморфная функция на кривой Λ, носитель дивизора которой не пересекается с объединением множеств A_i. Пусть γ – 1-цепь на кривой Λ такая, что $\partial\gamma$ совпадает с дивизором функции φ. Тогда для каждой $\{A_i\}$-регулярной формы ω справедливо соотношение*

$$\int_\gamma \omega = 0 \mod(R\omega),$$

где $R\omega$ – решетка периодов формы ω на многообразии $\Lambda \setminus \left(\bigcup A_i\right)$.

Остановимся на специальном случае. Пусть кривая Λ состоит из n экземпляров сферы Римана Λ_i, занумерованных в циклическом порядке. При этом на каждой сфере Λ_i выделены две различные точки (P_i, Q_i). Рассмотрим кривую Λ с набором множеств точек $A_1, \dots, A_n$, где множество A_i при $1 \leqslant i < n$ содержит пару точек (Q_i, P_{i+1}) и множество A_n – пару точек (Q_n, P_1). Кривую Λ с набором $\{A_i\}$ можно себе представить как “алгебраический многоугольник” со “сторонами” Λ_i и “вершинами” A_i, в которых склеены точки Q_i и P_{i+1}.

Примером такого алгебраического многоугольника является нормализация множества одномерных орбит на торической поверхности. Прообраз каждой нульмерной орбиты возникает на нормализации двух одномерных орбит. Эти нормализации надо склеить по прообразам общих нульмерных орбит.

На алгебраическом многоугольнике Λ с точностью до коэффициента существует лишь одна $\{A_i\}$-регулярная форма ω, именно, такая форма ω, что ее ограничение на Λ_i имеет полюса первого порядка лишь в точках Q_i и P_i, причем ее вычет в точке Q_i равен $+1$, а вычет в точке P_i равен -1.

Существование одной $\{A_i\}$-мероморфной формы влечет за собой существование одного ограничения на дивизоры $\{A_i\}$-мероморфных функций. Приведем это соотношение. Пусть t_i – параметр на сфере Λ_i, имеющий однократный нуль в точке Q_i и однократный полюс в точке P_i. Такой параметр единственен с точностью до умножения на ненулевую константу.

Пусть φ – $\{A_i\}$-мероморфная функция, N_i, L_i – множество нулей и полюсов ее ограничения на компоненту Λ_i, μ – кратность нуля или полюса, и γ_i – 1-цепь, граница $\partial\gamma_i$ которой совпадает с дивизором ограничения функции φ на компоненту Λ_i.

Утверждение 1. *Для всякого алгебраического многоугольника Λ и всякой $\{A_i\}$-мероморфной функции на нем справедливо равенство*

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant m}\prod_{a_j\in N_i}\bigl(t_i(a_j)\bigr)^{\mu(a_j)}=\prod_{1\leqslant i\leqslant m}\prod_{b_j\in L_i}\bigl(t_i(b_j)\bigr)^{\mu(b_j)}. \tag{1}$$

Доказательство. Действительно, по теореме Абеля имеем

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\int_{\gamma_i}\frac{dt_i}{t_i}=2k\pi\sqrt{-1}.$$

Интегрируя и потенцируя, получим нужное соотношение.

Утверждение 1 обратимо (чего и следовало ожидать, ведь утверждение 1 – специальный случай варианта теоремы Абеля).

Утверждение 2. *Всякий дивизор на алгебраическом многоугольнике Λ, для которого выполнено соотношение Абеля* (1), *является дивизором $\{A_i\}$-мероморфной функции.*

Доказательство. Ограничение функции φ на сферу Λ_i восстанавливается однозначно с точностью до множителя по ее нулям и полюсам. Вопрос в том, можно ли подобрать эти множители согласованно на всех сферах Λ_i. Восстановим отношение $\varphi(P_i)/\varphi(Q_i)$. Явно выписывая рациональную функцию φ на сфере Λ_i, получим

$$\varphi(P_i)\prod_{a_j\in N_i}t_i(a_j)^{k(a_j)}=\varphi(Q_i)\prod_{b_j\in L_i}t_i(b_j)^{k(b_j)}. \tag{2}$$

Найденные из (2) числа $z_i=\varphi(P_i)/\varphi(Q_i)$ связаны соотношением Абеля $\prod z_i=1$. Это соотношение и позволяет согласованно восстановить множители на сферах Λ_i (ср. с доказательством теоремы из §1).

Замечание. Соотношение Абеля (1) для алгебраических многоугольников сводится к формуле Виета для произведения корней полинома. Действительно, соотношение (2) есть не что иное, как формула Виета для рациональной функции φ на сфере Римана Λ_i. Перемножая эти соотношения по всем сферам, получим соотношение Абеля (1).

Нам понадобится следующая довольно неожиданная

Теорема 2. *Пусть Γ – кривая на торической поверхности M, не проходящая через ее неподвижные точки. Тогда найдется линейно эквивалентная ей кривая $\widetilde{\Gamma}$, не проходящая через неподвижные точки, которая пересекается с одномерными орбитами только по точкам с параметром ξ, равным (-1).*

Доказательство. Пусть кривая Γ задается в $\mathbb{C}^{*2}$ уравнением $P = 0$, и пусть Δ – многоугольник Ньютона полинома Лорана P. Возьмем описанный в следствии из §1 полином Лорана Q, построенный по многоугольнику Δ. Для этого полинома Лорана Q все полиномы $Q_{\vec{n}}$, $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$, не имеют корней, отличных от (-1). Замыкание $\widetilde{\Gamma}$ кривой, определенной в $\mathbb{C}^{*2}$ уравнением $Q = 0$, обладает требуемыми свойствами. Действительно, дивизор рациональной функции $\Phi = \dfrac{P}{Q}$ на поверхности M равен $\Gamma - \widetilde{\Gamma}$. (Дивизор не содержит одномерных орбит, так как многоугольники Ньютона полиномов Лорана P и Q равны.) То есть кривые Γ и $\widetilde{\Gamma}$ линейно эквивалентны. Далее, кривая $\widetilde{\Gamma}$ пересекает одномерные орбиты лишь в точках с параметром (-1), так как все полиномы $Q_{\vec{n}}$ не имеют корней, отличных от (-1).

Объясним теперь соотношение Виета (см. §4), пользуясь теоремой Абеля и теоремой 2. Для данной кривой Γ, не проходящей через неподвижные точки торической поверхности, рассмотрим эквивалентную кривую $\widetilde{\Gamma}$, пересекающую одномерные орбиты лишь в точках с параметрами, равными (-1). Такая кривая существует по теореме 2.

Пусть Φ – мероморфная функция на торической поверхности M, нули которой совпадают с кривой Γ, а полюса – с кривой $\widetilde{\Gamma}$. Применяя к ограничению φ этой функции на объединение одномерных орбит утверждение 1, получим

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} \prod_{a_j \in N_i} \bigl(\xi_i(a_j)\bigr)^{\mu(a_j)} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} (-1)^{\sum_{a_j \in N_i} \mu(a_j)}.$$

Или

$$\prod \bigl(-\xi(a_j)\bigr)^{\mu(a_j)} = 1.$$

Мы снова получили соотношение Виета. Итак, с точки зрения теоремы Абеля знак (-1), фигурирующий в этом соотношении, объясняется существованием в каждом классе эквивалентности кривой $\widetilde{\Gamma}$, пересекающейся с одномерными орбитами лишь по точкам, параметры которых равны (-1).

§11. Особенности характеристической кривой и многоугольники Ньютона

Каждой тройке Γ, f, g соответствует многоугольник Ньютона Δ – это многоугольник, построенный по функции $\mathrm{Mul} = \mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$ (см. §1). Для всякого многоугольника

Δ существуют некратные тройки Γ, f, g, для которых Δ является многоугольником Ньютона. Ситуация изменится, если наложить ограничение на кривую Γ. Ниже приводится необходимое условие на многоугольник Δ, чтобы он был многоугольником Ньютона некоторой некратной тройки Γ, f, g, в которой Γ – связная кривая рода g (см. следствие 1 в этом параграфе). Ограничение на многоугольник Δ является следствием приводимого ниже вычисления суммы родов особых точек характеристической кривой некратной тройки Γ, f, g.

Рассмотрим тройку Γ, f, g, в которой Γ – компактная, не обязательно связная кривая и (f, g) – мероморфная вектор-функция. Обозначим через $V \subset \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$ множество характеристических векторов функции $\mathrm{Mul}_{\Gamma f g}$. Другими словами, вектор $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$ содержится в множестве V, если и только если он является типом ростка (f, g) в некоторой точке кривой. Скажем, что торическая поверхность $M \supset \mathbb{C}^{*2}$ *достаточно полная* для тройки Γ, f, g, если веер этой поверхности содержит лучи, порожденные всеми векторами $\vec{n}$ из множества V. Обозначим через $\pi\colon \Gamma \to \mathbb{C}^{*2}$ характеристическое мероморфное отображение тройки Γ, f, g в тор $\mathbb{C}^{*2}$, переводящее точку a в точку $\pi(a) = (f(a), g(a))$.

Лемма 1. *Пусть $M \supset \mathbb{C}^{*2}$ – торическая поверхность, достаточно полная для тройки Γ, f, g. Тогда характеристическое мероморфное отображение $\pi\colon \Gamma \to \mathbb{C}^{*2}$ продолжается до аналитического отображения $\widetilde{\pi}\colon \Gamma \to M$. Образ кривой Γ при этом голоморфном отображении не проходит через нульмерные орбиты поверхности M.*

Доказательство вытекает из утверждения § 3.

Нам понадобятся некоторые инварианты изолированных особых точек (см. [1]). Пусть P – росток голоморфной функции двух переменных, имеющей изолированную особенность в точке a. Фиксируем малый шар B с центром в точке a. При малых $\varepsilon \neq 0$ уравнение $P = \varepsilon$ определяет в шаре B неособую связную кривую, являющуюся сферой с q ручками и k дырками. Число дырок k равно числу локально неприводимых ветвей аналитической кривой $P = 0$, проходящих через точку a. *Родом* особой точки a кривой $P = 0$ называется число $(k-1) + q$.

Утверждение 1. *Род ростка кривой $P = 0$ равен $\frac{1}{2}(\chi_0 - \chi_\varepsilon)$, где χ_0 и χ_ε – эйлеровы характеристики нормализаций кривых, определенных в шаре B уравнениями $P = 0$ и $P = \varepsilon$, где $\varepsilon \neq 0$ – достаточно малое комплексное число.*

Доказательство. Число χ_0 равно числу k локально неприводимых веток кривой $P = 0$, проходящих через точку a. Число χ_ε равно $2 - 2q - k$. Откуда и вытекает утверждение.

Теорема 1. *Если тройка Γ, f, g некратная и соответствующий ей многоугольник Ньютона Δ двумерен (т.е. не вырождается в отрезок), то сумма родов особых точек замыкания ее характеристической кривой $\pi(\Gamma) \subset \mathbb{C}^{*2}$ в достаточно полной торической поверхности $M \supset \mathbb{C}^{*2}$ равна $(K-1) + (B(\Delta) - g)$, где K – число компонент связности кривой Γ, g – ее род и $B(\Delta)$ – число внутренних целых точек в многоугольнике Δ.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $P = 0$ характеристической кривой $\pi(\Gamma) \subset \mathbb{C}^{*2}$. Многоугольник Ньютона полинома Лорана P совпадает с многоугольником Ньютона тройки Γ, f, g. Чуть изменим коэффициенты полинома Лорана P так, чтобы полученный при этом полином Лорана $\widetilde{P}$ был Δ-невырожденным для многоугольника Δ (см. [4]). Согласно теории многогранников Ньютона (см. [5]), если многоугольник Ньютона Δ двумерен, то замыкание кривой $\widetilde{P} = 0$ в достаточно полной торической поверхности будет сферой с числом ручек, равным $B(\Delta)$.

Рассмотрим замыкание в той же торической поверхности исходной характеристической кривой $P = 0$. Окружим особые точки a_i замыкания этой кривой малыми шарами B_i. Вне объединения шаров B_i замыкания кривых $\widetilde{P} = 0$ и $P = 0$ топологически эквивалентны и имеют одинаковые эйлеровы характеристики. Кривая Γ является нормализацией своей характеристической кривой. Согласно утверждению 1, для шара B_i имеем соотношение

$$(*) \qquad \chi(\pi^{-1}(B_i)) - \chi(\widetilde{\Gamma} \cap B_i) = 2g(a_i),$$

где χ – эйлерова характеристика и $g(a_i)$ – род особой точки a_i характеристической кривой. Эйлерова характеристика аддитивна. Поэтому сумма разностей $(*)$ эйлеровых характеристик по всем шарам B_i равна разности эйлеровых характеристик кривой Γ и замыкания кривой $\widetilde{P} = 0$, т.е. равна $(2K - 2g) - (2 - 2B(\Delta))$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *На связной кривой Γ рода g не существует вектор-функций (f, g), для которых тройка Γ, f, g некратна, а многоугольник Ньютона этой тройки двумерен и содержит меньше чем g внутренних целых точек.*

Кривая Γ, определенная в торе $\mathbb{C}^{*2}$ общим уравнением $P = 0$, с многоугольником Ньютона Δ, вместе с вектор-функцией (x, y) доставляет пример некратной тройки, для которой кривая Γ связна и ее род равен числу целых точек внутри многоугольника Ньютона этой тройки.

Следствие 2. *С точностью до изоморфизма не существует никаких других троек Γ, f, g, обладающих этим свойством.*

Следствие 3. *Если род связной кривой Γ меньше, чем число целых точек в многоугольнике Ньютона некратной тройки Γ, f, g, то замыкание характеристической кривой этой тройки в достаточно полной торической поверхности будет иметь особые точки.*

Для достаточно общих троек Γ, f, g все особые точки замыкания характеристической кривой лежат в торе $\mathbb{C}^{*2}$ и не попадают на одномерные орбиты достаточно полной торической поверхности. Опишем явно соответствующие условия общего положения. Для этого недостаточно знать лишь первые члены разложений функций f, g, нужна информация о вторых членах. Рассмотрим росток аналитической кривой Γ в точке a с локальным параметром u, $u(a) = 0$, и росток вектор-функции (f, g)

$$f = c_1 u^{b_1}(1 + \rho_1 u + \cdots), \qquad g = c_2 u^{b_2}(1 + \rho_2 u + \cdots),$$

причем $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ и вектор $\vec{b} = (b_1, b_2)$ отличен от нуля. Пусть $\vec{n}$ – тип этого ростка, а k – его кратность, т.е. $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2_{\mathrm{ir}}$, $\vec{b} = k\vec{n}$, k – натуральное число. Обозначим через $\pi\colon \Gamma \to \mathbb{C}^{*2}$ росток характеристического отображения, через $\widetilde{\pi}\colon \Gamma \to M$ – его аналитическое продолжение на торическую поверхность, содержащую одномерную орбиту $M_{\infty}^{\vec{n}}$, соответствующую вектору $\vec{n}$.

Утверждение 2. *Образ ростка $\widetilde{\pi}(\Gamma)$ в поверхности M будет ростком гладкой кривой, трансверсально пересекающей орбиту $M_{\infty}^{\vec{n}}$, если и только если вектор степени $\vec{b}$ неприводим (т.е. кратность k равна 1). Образ ростка $\widetilde{\pi}(\Gamma)$ в поверхности M будет ростком гладкой кривой, касающейся орбиты $M_{\infty}^{\vec{n}}$, если и только если вектор степени $\vec{b}$ приводим (т.е. кратность k больше 1) и коэффициенты ρ_1, ρ_2 не связаны соотношением $b_1\rho_2 = b_2\rho_1$.*

Утверждение проверяется прямым вычислением.

Замечание. Коэффициенты c_1, ρ_1, c_2, ρ_2 зависят от выбора локального параметра u. Однако соотношения $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $b_1\rho_2 \neq b_2\rho_1$ инвариантны относительно замены локального параметра.

Будем говорить, что росток (f, g) *гладкий на бесконечности*, если для него выполнены условия утверждения.

Теорема 2. *Если тройка Γ, f, g некратная и соответствующий ей многоугольник Ньютона двумерен, то сумма родов особых точек ее характеристической кривой $\pi(\Gamma) \subset \mathbb{C}^{*2}$ не превосходит числа $(K-1) + (B(\Delta) - g)$, где K, $B(\Delta)$ и g такие же, как в теореме 1. Равенство достигается, если и только если все ростки вектор-функции (f, g) ненулевого типа $\vec{n}$ являются гладкими на бесконечности, и не существует двух различных точек, в которых ростки вектор-функции имеют ненулевой одинаковый тип и одинаковые приведенные числа Вейля.*

Доказательство. Действительно, род особой точки неотрицателен, и равен нулю лишь для неособой точки. Поэтому неравенство в теореме 2 вытекает из теоремы 1. Неравенство будет равенством, если и только если замыкание характеристической кривой неособо в точках его пересечения с одномерными орбитами на поверхности M. Для этого нужно, чтобы две гладких ветки не пересекались в одной точке. Для окончания доказательства достаточно воспользоваться утверждением 2 из настоящего параграфа и утверждением 2 из §3.

Формулируемая ниже теорема 3 (так же как теоремы 1–2) демонстрирует, что многоугольники Ньютона троек Γ, f, g играют ту же роль, что и обычные многоугольники Ньютона.

Скажем, что для двух троек Γ_1, f_1, g_1 и Γ_2, f_2, g_2 выполнено условие невырожденности, если не существует пары точек $a \in \Gamma_1$ и $b \in \Gamma_2$, в которых ростки вектор-функции (f_1, g_1) и (f_2, g_2) имеют одинаковый тип и одинаковые приведенные числа Вейля.

Теорема 3. *Для любых двух троек Γ_1, f_1, g_1 и Γ_2, f_2, g_2 число изолированных точек пересечения их образов при характеристических отображениях, посчитанных с учетом кратностей, не превосходит удвоенного смешанного объема их многоугольников Ньютона. Равенство достигается, если и только если тройки обладают свойством невырожденности.*

Доказательство вытекает из теоремы Бернштейна [2], примененной к характеристическим кривым троек Γ_1, f_1, g_1 и Γ_2, f_2, g_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. 1. М.: Наука, 1982.
[2] Бернштейн Д. Н. Число корней системы уравнений // Функцион. анализ и его прилож. 1975. Т. 9. №3. С. 1–4.
[3] Данилов В. И. Геометрия торических многообразий // УМН. 1978. Т. 33. №2. С. 85–135.
[4] Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и торические многообразия // Функцион. анализ и его прилож. 1977. Т. 11. №4. С. 56–64.
[5] Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и род полных пересечений // Функцион. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. №1. С. 51–61.
[6] Griffiths Ph. Variations on a theorem of Abel // Invent. Math. 1976. V. 35. №3. P. 321–390.
[7] Kempf G., Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B. Toroidal embeddings // Lecture Notes in Math. V. 339, 1973.

Институт системного анализа РАН;
Университет Торонто, Канада

Поступила в редакцию
20.05.1997