Алгебра и анализ
Том 10 (1998), вып. 3

КРАЕВЫЕ ИНДЕКСЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ 1-ФОРМ С ОДНОРОДНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

© А. Г. Хованский

В статье приводятся примеры 1-форм с однородными полиномиальными компонентами фиксированной мультистепени, краевые индексы которых принимают все значения, не противоречащие известным ограничениям. Рассматриваются также другие вопросы, связанные с индексами особых точек полиномиальных векторных полей. Статья является непосредственным продолжением работы автора [7]. Она тесно связана с работами Петровского–Олейник об оценках эйлеровой характеристики алгебраических множеств и с работой Арнольда об оценках индексов особых точек полиномиальных векторных полей.

§1. Формулировки основных результатов и расположение материала

1.1. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ полупространство $x_0 \geq 0$ и дифференциальную 1-форму $\alpha = \overline{P}_0 dx_0 + \overline{P}_1 dx_1 + \dots + \overline{P}_n dx_n$. Допустим, что форма α и ее ограничение на край $x_0 = 0$ полупространства $x_0 \geq 0$ имеют изолированную особую точку в начале координат. В. И. Арнольд ввел три инварианта (индекса) изолированной особой точки 1-формы на крае многообразия: краевой индекс i, обычный индекс i_1 и суженный индекс i_0 (см. [2]).

В точке 0 на крае полупространства $x_0 \geq 0$ эти индексы равны соответственно индексам полей

$$V = x_0 \overline{P}_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \overline{P}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \overline{P}_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$
$$V_1 = \overline{P}_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \overline{P}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \overline{P}_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

в начале координат пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ и индексу поля

$$V_0 = \overline{P}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \overline{P}_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Ключевые слова: индекс векторного поля, неравенства Петровского–Олейник, неравенства Арнольда.

Работа выполнена при поддержке гранта MBF000 Международного научного Фонда, канадского гранта OGP0156833 и гранта 95-011-8701 РФФИ.

в начале координат пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть компоненты $\overline{P}_0, \dots, \overline{P}_n$ 1-формы α являются однородными полиномами степеней $m_0, m_1, \dots, m_n$ или, короче, имеют мультистепень $\mathbf{m}, m_0$, где $\mathbf{m} = m_1, \dots, m_n$. Какие значения может принимать тройка индексов i, i_1, i_0 для 1-формы α с однородными компонентами фиксированной мультистепени $\mathbf{m}, m_0$? Полный ответ на этот вопрос доставляет формулируемая ниже теорема 1. Для формулировки ответа нам понадобятся некоторые определения и обозначения. С мультистепенью $\mathbf{m}, m_0$ связаны следующие геометрические объекты и величины:

- $\Delta(\mathbf{m})$ — параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, заданный неравенствами

$$0 \le y_1 \le m_1 - 1, \dots, 0 \le y_n \le m_n - 1;$$

- $\mu = m_1 \dots m_n$ — число целых точек в параллелепипеде $\Delta(\mathbf{m})$;
- $\rho = \dfrac{1}{2}(m_1 + \dots + m_n - n)$ — среднее значение суммы координат точек параллелепипеда $\Delta(\mathbf{m})$;
- $\Pi(\mathbf{m})$ — число целых точек в центральном сечении $y_1 + \dots + y_n = \rho$ параллелепипеда $\Delta(\mathbf{m})$;
- $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$ — число целых точек параллелепипеда $\Delta(\mathbf{m})$, лежащих в полосе

$$\rho - \frac{1}{2}m_0 \le y_1 + \dots + y_n \le \rho + \frac{1}{2}m_0;$$

- $O(\mathbf{m}, m_0)$ — число целых точек в $\Delta(\mathbf{m})$, удовлетворяющих неравенству

$$\rho - \frac{1}{2}m_0 \le y_1 + \dots + y_n \le \rho.$$

Теорема 1. *Краевой, обычный и суженный индексы формы α удовлетворяют неравенствам $|i + i_1| \le \Pi(\mathbf{m}, m_0)$, $|i_0| \le \Pi(\mathbf{m})$ и сравнению $i + i_1 \equiv i_0 \equiv \mu \mod 2$. Если $m_0 + m_1 + \dots + m_n \equiv n + 1 \mod 2$, то $i_1 = 0$, а если $m_0 + m_1 + \dots + m_n \equiv n \mod 2$, то $i = 0$. Кроме того, если $m_0 = 0$, то $i + i_1 = \pm i_0$.*

Обратно, для любой тройки целых чисел i, i_1, i_0, удовлетворяющих выписанным соотношениям, существует 1-форма α, компоненты которой — однородные полиномы степеней $m_0, m_1, \dots m_n$, а ее краевой, обычный и суженный индексы относительно полупространства $x_0 \ge 0$ равны i, i_1 и i_0 соответственно.

1.2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ компактную гиперповерхность M, являющуюся поверхностью неособого нулевого уровня полинома P_0 степени m_0 (т.е. M задается уравнением $P_0 = 0$). Неособая гиперповерхность нечетной степени при $n > 1$ обязательно некомпактна, поэтому будем считать, что число m_0 четно.

Для полиномиального отображения $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и точки $a \in \mathbb{R}^n \setminus P(M)$ определено число $\mathrm{Ind}(P, M, a)$ оборотов гиперповерхности $P(\widetilde{M})$ вокруг a. Оно определяется как степень отображения $\pi \circ \widetilde{P}\colon M \to S_a$, где S_a — сфера с центром в точке a, $\pi\colon \mathbb{R}^n \setminus a \to S_a$ — центральная проекция, $\widetilde{P}$ — сужение отображения P на M.

Вопрос. Какие значения может принимать число $\mathrm{Ind}(P, M, a)$ для гиперповерхности M четной степени m_0 и полиномиального отображения P мультистепени, не превосходящей $\mathbf{m}$, при фиксированных m_0 и $\mathbf{m}$?

Формулируемая ниже теорема 2 дает оценку числа $\mathrm{Ind}(P, M, a)$, которая точна для половины мультистепеней $\mathbf{m}, m_0$ и близка к точной для другой половины мультистепеней.

Теорема 2. *Пусть m_0 четно. Тогда для всякого целого k, $|k| \le O(\mathbf{m}, m_0 - 1)$, существуют компактная гладкая алгебраическая гиперповерхность $M \subset \mathbb{R}^n$ степени m_0 и полиномиальное отображение $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ мультистепени $\mathbf{m}$ такие, что $\mathrm{Ind}(P, M, 0) = k$. При $n > 1$ поверхность M можно выбрать так, чтобы она переводилась в сферу обратимым полиномиальным преобразованием пространства $\mathbb{R}^n$.*

Для любой компактной гладкой алгебраической гиперповерхности M четной степени m_0, любого полиномиального поля P мультистепени, не превосходящей $\mathbf{m}$, и любой точки a, не лежащей на образе гиперповерхности, справедливы неравенства:

1) *если $m_0 + \cdots + m_n \not\equiv n \mod 2$, то $|\mathrm{Ind}(P, M, a)| \le O(\mathbf{m}, m_0 - 1)$;*
2) *если $m_0 + \cdots + m_n \equiv n \mod 2$, то $|\mathrm{Ind}(P, M, a)| \le O(\mathbf{m}, m_0)$ и для любого j, $1 \le j \le n$, имеем $|\mathrm{Ind}(P, M, a)| \le O(\mathbf{m} + 1_j, m_0 - 1)$, где $\mathbf{m} + 1_j = m_0, \ldots, m_j + 1, \ldots, m_n$.*

Итак, теорема 2 дает полный ответ на поставленный вопрос при $m_0 + \cdots + m_n \not\equiv n \mod 2$. Отметим, что и при $m_0 + \cdots + m_n \equiv n \mod 2$ теорема 2 тоже в некоторых случаях окончательна. Так случается, если одна из компонент m_j значительно превосходит остальные. Именно справедливо следующее

Следствие. *Пусть m_0 четно и $m_1 + \cdots + m_n \equiv n \mod 2$. Если для некоторого j, $0 \le j \le n$ справедливо неравенство $m_j > (\sum m_i - n - m_0)/2$, то*

$$|\mathrm{Ind}(P, M, a)| \le O(\mathbf{m}, m_0 - 1).$$

Доказательство. Если, в условиях следствия, $j > 0$, то $O(\mathbf{m}, m_0 - 1) = O(\mathbf{m} + 1_j, m_0 - 1)$. Если $j = 0$, то $O(\mathbf{m}, m_0 - 1) = O(\mathbf{m}, m_0)$. В обоих случаях нужная оценка содержится в теореме 2. •

Замечание. Если, в условиях следствия, $j > 0$, то, как легко видеть,

$$O(\mathbf{m}, m_0 - 1) = \frac{m_0 \dots m_n}{2m_j}.$$

В этом случае неравенство теоремы 2 не только просто формулируется, но и допускает более простое доказательство [3].

Обратимся к геометрической интерпретации зазора между не запрещенными теоремой 2 значениями характеристики $\operatorname{Ind}(P, M, a)$ и теми значениями, которые, согласно этой теореме, действительно реализуются. Для этого нам надо сравнить числа $O(\mathbf{m} + 1_j, m_0 - 1)$ и $O(\mathbf{m}, m_0)$ с числом $O(\mathbf{m}, m_0 - 1)$ при $m_0 + \dots + m_n \equiv n \mod 2$ и четном m_0.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ пересечение параллелепипеда, выделенного неравенствами $0 \le y_1 \le q_1, \dots, 0 \le y_n \le q_n$, с полосой $q_{n+1} \le y_1 + \dots + y_n \le \rho$. При $q_1 = m_1 - 1, \dots, q_n = m_n - 1$ и $q_{n+1} = \rho - \frac{1}{2}m_0 + 1$ число целых точек в этом многограннике равняется числу $O(\mathbf{m}, m_0 - 1)$. Если при $j \le n$ параметр q_j увеличить на единицу, то число точек в получившемся многограннике будет равно числу $O(\mathbf{m} + 1_j, m_0 - 1)$. Если уменьшить q_{n+1} на единицу, то число точек в получившемся многограннике будет равно числу $O(\mathbf{m}, m_0 - 1)$.

Следовательно, $O(\mathbf{m} + 1_j, m_0 - 1) - O(\mathbf{m}, m_0 - 1)$ есть число целых точек, лежащих в пересечении полосы

$$\rho - \frac{1}{2}m_0 \le y_1 + \dots + y_n \le \rho$$

с $(n-1)$-мерным параллелепипедом, определенным уравнением $y_j = m_j$ и неравенствами $0 \le y_i \le m_i - 1$ при $i \ne 0$, $i \ne j$.

Легко видеть, что $O(\mathbf{m}, m_0) - O(\mathbf{m}, m_0 - 1)$ есть число целых точек, лежащих на $(n-1)$-мерном сечении

$$y_1 + \dots + y_n = \rho - \frac{1}{2}m_0$$

n-параллелепипеда $\Delta(\mathbf{m})$.

1.3. Несколько слов о расположении материала. Теорема 1 доказывается в §2–4, теорема 2 доказывается в §5. В §6 приводятся ограничения на индекс особой точки неоднородного полиномиального векторного поля. В §7 комментируется связь оригинальных неравенств Петровского–Олейник с неравенствами статьи [7] и с неравенствами Арнольда. В §8 обсуждается геометрия чисел $\Pi(\mathbf{m})$, $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$ и $O(\mathbf{m}, m_0)$, играющих существенную роль как в настоящей статье, так и в неравенствах Петровского–Олейник, в неравенствах Арнольда и в неравенствах из статьи [7].

1.4. Описанные в настоящей статье результаты были получены в 1985 г. и оформлены в виде главы докторской диссертации автора. Глава также содержала изложение статьи [7]. В окончательный вариант диссертации она не попала из-за недостатка места. Текст пролежал в столе 10 лет — я просто забыл, что он содержит неопубликованные результаты. Я признателен моей жене Т. В. Белокриницкой за помощь при подготовке статьи к печати и рецензенту, который посоветовал выбросить из текста изложение статьи [7].

§2. Аффинный вариант теоремы 1

Нам будет удобно перейти от локальной ситуации к аффинной. Введем сначала несколько обозначений.

Пусть $V = P_1, \dots, P_n$ — векторное поле в $\mathbb{R}^n$ с полиномиальными компонентами P_i и P_0 — полином. Обозначим через ind сумму индексов всех особых точек поля V в $\mathbb{R}^n$, через ind^+ и ind^- — суммы индексов особых точек поля V в областях $P_0 > 0$ и $P_0 < 0$. Будем говорить, что пара V, P_0 имеет мультистепень, не превосходящую (равную) $\mathbf{m}, m_0$, где $\mathbf{m} = m_1, \dots, m_n$, если степени полиномов P_i, $i = 0, \dots, n$, не превосходят (равны) m_i. Будем говорить, что пара V, P_0 *невырождена*, если, во-первых, вещественная гиперповерхность $P_0 = 0$ не проходит через особые точки поля V и, во-вторых, вещественные особые точки поля V изолированы и „лежат в конечной части пространства $\mathbb{R}^n$“. Напишем второе условие подробнее. Пусть $\overline{P}_i$ — такие однородные полиномы степеней m_i от переменных $x_0, x_1, \dots, x_n$, что

$$\overline{P}_i(1, x_1, \dots, x_n) \equiv P_i(x_1, \dots, x_n).$$

Тогда второе условие означает, что система

$$\overline{P}_1 = \dots = \overline{P}_n = x_0 = 0$$

имеет только тривиальное решение $x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0$.

Теорема 1′. *Для невырожденной пары V, P_0 мультистепени $\mathbf{m}, m_0$ числа $a = \operatorname{ind}$ и $b = \operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-$ удовлетворяют неравенствам $|a| \le \Pi(\mathbf{m})$, $|b| \le \Pi(\mathbf{m}, m_0)$ и* *сравнениям* $a \equiv b \equiv \mu \mod 2$. *При* $m_0 = 0$ *выполняется еще (очевидное) соотношение* $a = \pm b$.

Обратно, для любой пары целых чисел a, b, *удовлетворяющих этим соотношениям, существует невырожденная пара* V, P_0 *мультистепени* $\mathbf{m}, m_0$, *для которой* $\operatorname{ind} = a$ *и* $\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^- = b$.

Остановимся теперь на связи теоремы $1'$ с теоремой 1. Пусть $\alpha = \overline{P}_0 dx_0 + \dots + \overline{P}_n dx_n$ — 1-форма с однородными компонентами $\overline{P}_i$ мультистепени $\mathbf{m}, m_0$. С формой α свяжем пару V, P_0, где $V = P_1, \dots, P_n$, а P_i при $i = 0, \dots, n$ определяется формулой

$$P_i(x_1, \dots, x_n) = \overline{P}_i(1, x_1, \dots, x_n).$$

Легко проверить следующее

Утверждение. 1. *Ограничение формы* α *на гиперплоскость* $x_0 = 0$ *имеет изолированную особенность в точке* 0 *в том и только в том случае, если пара* V, P_0 *невырождена.*

2. *Индекс в нуле ограничения формы* α *на гиперплоскость* $x_0 = 0$ *равен характеристике* $\operatorname{ind}^+ + \operatorname{ind}^-$ *пары* V, P_0.

3. *При* $m_0 + m_1 + \dots + m_n \equiv n + 1 \mod 2$ *обычный индекс формы* α *в точке* 0 *равен характеристике* $\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-$ *пары* V, P_0, *а ее краевой индекс в этой точке равен нулю.*

4. *При* $m_0 + m_1 + \dots + m_n \equiv n \mod 2$ *обычный индекс формы* α *в точке* 0 *равен нулю, а ее краевой индекс в этой точке равен характеристике* $\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-$ *пары* V, P_0. •

Утверждение показывает, что теорема $1'$ является переформулировкой теоремы 1. Ниже мы будем доказывать именно теорему $1'$. К счастью, бóльшая часть этой теоремы содержится в статье [7].

Во-первых, в этой статье доказаны неравенства $|\operatorname{ind}| \le \Pi(\mathbf{m})$, $|\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-| \le \Pi(\mathbf{m}, m_0)$ и сравнения $a \equiv b \equiv \mu \mod 2$. Во-вторых, в ней для каждого числа a такого, что $|a| \le \Pi(m)$ и $a \equiv \mu \mod 2$, построен пример невырожденного поля V мультистепени $\mathbf{m}$, для которого $\operatorname{ind} = a$; для каждого числа b такого, что $|b| \le \Pi(\mathbf{m}, m_0)$ и $b \equiv \mu \mod 2$, построен пример невырожденной пары V, P_0 мультистепени $\mathbf{m}, m_0$, для которой $\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^- = b$.

Нам осталось только для каждой пары чисел a, b, удовлетворяющей условиям теоремы $1'$, построить пример невырожденной пары V, P_0 мультистепени $\mathbf{m}, m_0$, для которой $\operatorname{ind} = a$, $\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^- = b$.

Если выполнено соотношение $m_1 + \dots + m_n \not\equiv n \mod 2$, то единственное возможное значение характеристики ind равно нулю. В этом случае достаточно следить лишь за одной характеристикой $\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-$. Таким образом, этот случай полностью содержится в статье [7].

Покажем, что при $m_1 + \dots + m_n \equiv n \mod 2$ достаточно ограничиться случаем четного числа m_0. Действительно, при выполнении этого соотношения и нечетном m_0 выполняется равенство $\Pi(\mathbf{m}, m_0 - 1) = \Pi(\mathbf{m}, m_0)$. Допустим, что нам удалось построить невырожденную пару V, P_0 мультистепени $\mathbf{m}, m_0 - 1$ с заданными характеристиками ind и $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$. Тогда мы можем построить невырожденную пару мультистепени $\mathbf{m}, m_0$ с теми же значениями указанных характеристик ind и $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$. Для этого в качестве векторного поля достаточно взять уже построенное поле V, а уже построенный полином P_0 достаточно умножить на полином первой степени, положительный во всех особых точках поля V. Поэтому для доказательства теоремы $1'$ (и, следовательно, для доказательства теоремы 1) достаточно построить примеры невырожденных пар со всевозможными характеристиками ind и $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ в случае, когда мультистепень $\mathbf{m}, m_0$ удовлетворяет соотношениям

$$m_1 + \dots + m_n \equiv n \mod 2, \qquad m_0 \equiv 0 \mod 2.$$

Соответствующие примеры строятся в §4. Для построения примеров нам понадобятся проективные преобразования пар V, P_0, введенные в §2 статьи [7]. Напомним, что это такое.

§3. Проективные преобразования

Настоящий параграф представляет собой пересказ §2 из [7].

Пусть Γ — гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, определенная неоднородным линейным уравнением

$$l(x) = l_1(x) + l_0 = 0.$$

Сделаем проективное преобразование $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, переводящее гиперплоскость Γ в бесконечно удаленную; $g(x) = (\frac{1}{l(x)})A(x)$, где $A(x)$ — аффинное преобразование. *Проективным преобразованием* пары V, P_0, где V — векторное поле с компонентами $P_1, \dots, P_n$ степеней $m_1, \dots, m_n$ и P_0 — полином степени m_0, назовем переход к паре $\widetilde{V}, \widetilde{P}_0$, где

$$\widetilde{V} = \widetilde{P}_1, \dots, \widetilde{P}_n \text{ и } \widetilde{P}_i(x) = l^{m_i}(x) P_i(g(x)) \quad \text{при } i = 0, \dots n.$$

Если a — особая точка для поля V, то точка $\widetilde{a} = g^{-1}(a)$ будет особой для поля $\widetilde{V}$. Якобиан $\det \frac{\partial g}{\partial x}$ определен вне гиперплоскости Γ и нигде не обращается в нуль. Скажем, что преобразование $x \mapsto g(x) = (\frac{1}{l(x)})A(x)$ *положительно*, если его якобиан положителен в области $l(x) > 0$. При нечетных n пространство $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо, и положительные преобразования совпадают с преобразованиями, сохраняющими ориентацию. В общем случае положительные преобразования в точности соответствуют линейным преобразованиям пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ с положительным определителем.

Напомним, как меняются глобальные характеристики ind, ind^+ и $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ пары V, P_0 при проективных преобразованиях. Каждая из этих глобальных характеристик получается суммированием соответствующих локальных характеристик по множеству X особых точек поля V. Символически это можно записать в виде равенства

$$F(V, P_0) = \sum_{a \in X} F(V, P_0)_a,$$

где F — это ind, ind^+ или $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$.

Для поля V и проективного преобразования $x \mapsto g(x)$ обозначим через $X(g)$ множество особых точек a поля V, для которых определено $\widetilde{a} = g^{-1}(a)$. Характеристика F пары V, P_0 называется *проективно инвариантной*, если для любого положительного преобразования $g = (\frac{1}{l(x)})A(x)$ и любого $a \in X(g)$ справедливо равенство

$$F(V, P_0)_a = F(\widetilde{V}, \widetilde{P}_0)_{\widetilde{a}}.$$

Характеристика F называется *антиинвариантной*, если

$$F(V, P_0)_a = (\operatorname{sign} l(\widetilde{a}))F(\widetilde{V}, \widetilde{P}_0)_{\widetilde{a}}.$$

Несложная проверка доказывает следующее

Утверждение 1.

1. *Проективно инвариантны характеристики*:
ind, *если* $m_1 + \dots + m_n \not\equiv n \mod 2$;

$\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$, *если* $m_0 + \dots + m_n \not\equiv n \mod 2$,

ind^+, *если* $m_0 + \dots + m_n \not\equiv n \mod 2$ *и* m_0*четно.*

2. *Проективно антиинвариантны характеристики*:
ind, *если* $m_1 + \dots + m_n \equiv n \mod 2$;

$\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$, *если* $m_0 + \dots + m_n \equiv n \mod 2$,

ind^+, *если* $m_0 + \dots + m_n \equiv n \mod 2$ *и* m_0*четно.*

Отметим, что при нечетном m_0 характеристика ind^+, вообще говоря, не инвариантна и не антиинвариантна.

Конечно, описанное поведение характеристик при проективных преобразованиях связано с утверждением из §2. Объясним эту связь на примере характеристики $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$. Для каждого полинома P от n переменных $x_1, \dots, x_n$ обозначим через $\overline{P}$ однородный полином от $n+1$ переменных $x_0, x_1, \dots, x_n$, имеющий ту же степень, что и P, и удовлетворяющий тождеству

$$\overline{P}(1, x_1, \dots, x_n) = P(x_1, \dots, x_n).$$

Из утверждения из §2 вытекает следующее

Утверждение 2. *Пусть пара* V, P_0 *мультистепени* m, m_0 *невырождена в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда*:

1) *если* $m_0 + m_1 + \cdots + m_n \not\equiv n \mod 2$, *то векторное поле в* $\mathbb{R}^{n+1}$ *с компонентами* $\overline{P}_0, \ldots, \overline{P}_n$ *имеет невырожденную особенность в точке* 0 *и индекс точки* 0 *для этого поля равняется характеристике* $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ *пары* V, P_0;
2) *если* $m_0 + m_1 + \ldots m_n \equiv n \mod 2$, *то векторное поле в* $\mathbb{R}^{n+1}$ *с компонентами* $x_0\overline{P}_0, \overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ *имеет невырожденную особенность в точке* 0 *и индекс точки* 0 *для этого поля равняется характеристике* $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ *пары* V, P_0.

Линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ с положительным определителем не меняет индексов полей $\overline{P}_0, \ldots, \overline{P}_n$ и $x_0\overline{P}_0, \overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ в начале координат. Поэтому утверждение 2 объясняет проективную инвариантность характеристики $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ в случае, когда $m_0 + \cdots + m_n \not\equiv n \mod 2$, и ее проективную антиинвариантность в противном случае.

Обозначим через Γ_∞ образ бесконечно удаленной плоскости при проективном преобразовании. Для преобразования

$$g(x) = \left(\frac{1}{l(x)}\right) A(x),$$

где $A(x)$ — линейное преобразование и $l(x) = l_1(x) + l_0$, уравнение гиперплоскости Γ_∞ имеет вид $l_1(x)(A^{-1}(x)) = 1$. С гиперплоскостью $l_1(x) = p$, где $p > 0$, свяжем преобразование $x \mapsto \dfrac{px}{l_1(x) + 1}$, для которого эта плоскость есть Γ_∞. Инвариантные характеристики особых точек поля сохраняются при проективном преобразовании. Антиинвариантные характеристики сохраняются для особых точек, лежащих в одном из двух полупространств с границей Γ_∞, и изменяют знак для особых точек, лежащих в другом полупространстве (именно характеристики сохраняются для точек, лежащих в образе полупространства $l(x) > 0$, и меняют знак для точек, лежащих в образе полупространства $l(x) < 0$).

§4. Примеры к теореме 1

В этом параграфе мы построим все недостающие примеры невырожденных пар V, P_0 мультистепени m, m_0 при $m_0 > 0$.

Отметим, что знаки характеристик ind и $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ можно менять независимо: одновременное изменение знака у одной из компонент поля V и у полинома P_0 меняет знак у характеристики ind и не меняет характеристику

$\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$; изменение знака у полинома P_0 лишь меняет знак у характеристики $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$. Нам достаточно ограничиться случаем, когда $m_1 + \cdots + m_n \equiv n \mod 2$, $m_0 \equiv 0$ (см. §2).

4.1. Как и в статье [7], при построении примеров для нас основную роль будет играть простейшее векторное поле $V(\mathbf{m})$ мультистепени $\mathbf{m} = m_1, \ldots m_n$ с компонентами

$$P_i = \prod_{0 \le k \le m_i - 1} (x_i - k), \; i = 1, \ldots, n.$$

Его особые точки совпадают с целыми точками параллелепипеда $\Delta(\mathbf{m})$, определенного неравенствами $0 \le x_i \le m_i - 1$, $i = 1, \ldots, n$. Знаки якобиана в особых точках чередуются в „шахматном порядке". При этом в особых точках, лежащих на одном сечении $\sum x_i = k$, знак якобиана одинаковый. При переходе к следующему сечению $\sum x_i = k + 1$ этот знак меняется на противоположный. Во всех построенных ниже примерах фигурирует либо само поле $V(\mathbf{m})$, либо поля, полученные из него проективными преобразованиями.

4.2. Построение невырожденных пар V, P_0 с экстремальными по модулю характеристиками ind и $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$. Мы рассматриваем мультистепени $\mathbf{m}, m_0$, для которых $m_0 + \cdots + m_n \equiv n \mod 2$ и m_0 четно. В этом случае для получения экстремальной пары достаточно взять векторное поле $V(\mathbf{m})$ и описанный ниже полином P_0 и сделать проективное преобразование с плоскостью Γ_∞, заданной уравнением

$$\sum x_i = \rho - \frac{1}{2}.$$

Покажем (см. [7]), что характеристика ind для построенного поля действительно экстремальна, т.е. равна по модулю числу $\Pi(\mathbf{m})$. Действительно, в рассматриваемом случае характеристика ind антиинвариантна. На центральном сечении $\sum x_i = \rho$ параллелепипеда $\Delta(\mathbf{m})$ лежит ровно $\Pi(\mathbf{m})$ особых точек поля $V(\mathbf{m})$. На сечениях $\sum x_i = \rho - k$ и $\sum x_i = \rho + k$ лежит по одинаковому числу особых точек и якобиан во всех этих точках имеет один и тот же знак. Сделаем проективное преобразование $x \mapsto g(x)$, для которого плоскость Γ_∞ имеет уравнение

$$\sum x_i = \rho - \frac{1}{2},$$

например преобразование

$$x \mapsto \frac{(\rho - 1/2)x}{\sum x_i + 1}.$$

Сечения $\sum x_i = \rho + k$ и $\sum x_i = \rho - k$ при $k > 0$ лежат по разные стороны от Γ_∞. Индексы прообразов особых точек поля $V(\mathbf{m})$, лежащих на этих сечениях, будут компенсировать друг друга. Поэтому модуль индекса поля $\widetilde{V}$ будет равен числу особых точек поля $V(\mathbf{m})$, лежащих на сечении $\sum x_i = \rho$, т.е. $\Pi(\mathbf{m})$. Вот явная формула для компоненты $\widetilde{P}_i$ поля $\widetilde{V}$:

$$\widetilde{P}_i(x) = \prod_{0 \le k \le m_i} \left((\rho - 1/2)x_i - k\left(\sum x_i + 1\right)\right).$$

Выберем теперь полином P_0. Именно положим

$$P_0 = (-1)^q \prod_{k \in I} \left(\sum x_i - \rho + \frac{1}{2} - k \right), \qquad I = \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm q\} \quad \text{и} \quad 2q = m_0.$$

Полином P_0 имеет постоянный знак на каждом сечении

$$\sum x_i - \rho = l$$

параллелепипеда $\Delta(\mathbf{m})$. При этом знаки полинома P_0 на симметричных сечениях $\sum x_i - \rho = l$ и $\sum x_i - \rho = -l$, где l — натуральное число, различны, если эти сечения лежат внутри полосы

$$\rho - \frac{1}{2}m_0 \le \sum x_i \le \rho + \frac{1}{2}m_0,$$

и одинаковы в противном случае.

Сделаем наше проективное преобразование, для которого плоскость Γ_∞ имеет уравнение

$$\sum x_i = \rho - \frac{1}{2}.$$

Так как в рассматриваемом случае характеристика $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ антиинвариантна, то после проективного преобразования она не изменится для особых точек, лежащих в образе полупространства $\sum x_i > \rho - 1/2$, и сменит знак для особых точек, лежащих в образе дополнительного полупространства. Целочисленные симметричные сечения параллелепипеда $\Delta(\mathbf{m})$ лежат по разные стороны от гиперплоскости $\sum x_i = \rho - 1/2$. Поэтому после проективного преобразования модуль суммы характеристики $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ по особым точкам, лежащим на образе симметричных сечений, будет равен нулю, если сечения лежат вне полосы

$$\rho - \frac{1}{2}m_0 \le \sum x_i \le \rho + \frac{1}{2}m_0,$$

и будет равен числу целых точек, лежащих на паре симметричных сечений, в противоположном случае. Далее, для всех особых точек, лежащих на образах симметричных сечений, расположенных внутри полосы, характеристика $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ имеет один и тот же знак. Поэтому $|\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-|$ для преобразованного поля и преобразованного полинома P_0 равняется числу $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$. Как мы уже говорили, модуль характеристики ind для преобразованного поля равен числу $\Pi(\mathbf{m})$.

4.3. Построение невырожденных пар V, P_0 с экстремальной по модулю характеристикой $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ и любой характеристикой ind, не запрещенной теоремой 1. Мы рассматриваем мультистепени $\mathbf{m}, m_0$, для которых $m_1 + \dots + m_n \equiv n \mod 2$ и m_0 — четное. В этом случае обе характеристики ind и $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ антиинвариантны.

Для каждого целого k от 0 до $\Pi(\mathbf{m})$ нам понадобится полином L_k первой степени со следующими свойствами:

1) полином L_k отрицателен ровно на k целых точках, лежащих на сечении $\sum x_i = \rho$ параллелепипеда $\Delta(\mathbf{m})$, и положителен на остальных $\Pi(\mathbf{m}) - k$ целых точках этого сечения;

2) модуль полинома L_k в каждой целой точке параллелепипеда $\Delta(\mathbf{m})$ не превосходит $1/2$.

Рассмотрим линейную функцию $L = \sum a_i x_i$, где a_i — вещественные числа, независимые над полем рациональных чисел Q и столь малые, что $|L| < 1/4$ на $\Delta(\mathbf{m})$. Тогда примеры полиномов L_k можно выбрать в виде $L_k = L - t$, где t — параметр, изменяющийся от $-1/4$ до $+1/4$.

Действительно, на каждой поверхности уровня функции L лежит не более одной целой точки (так как числа a_i независимы над $\mathbb{Q}$). Полином $L - 1/4$ отрицателен на параллелепипеде $\Delta(\mathbf{m})$, а полином $L + 1/4$ положителен на этом параллелепипеде. Поэтому для каждого k, $0 \le k \le \Pi(\mathbf{m})$ можно подобрать t так, чтобы полином $L - t$ был отрицателен на k целых точках центрального сечения и положителен во всех остальных целых точках этого сечения.

Теперь для каждого k, заключенного между 0 и $\Pi(\mathbf{m})$, построим невырожденную пару, для которой характеристика $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ равна по модулю числу $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$ и индекс поля V равен по модулю числу $\Pi(\mathbf{m}) - 2k$. Для этого достаточно взять поле $V(\mathbf{m})$ и полином $P_0 = P_{0,k}$, описываемый в этом же пункте ниже, и сделать проективное преобразование с плоскостью Γ_∞, заданной уравнением

$$\sum x_i + L_k = \rho.$$

Действительно, полином $\sum x_i - \rho + L_k$ отрицателен на всех целочисленных сечениях $\sum x_i - \rho = c$ параллелепипеда $\Delta(\mathbf{m})$, лежащих ниже его центрального сечения (т.е. c — положительное целое число), и положителен на всех таких сечениях, лежащих выше центрального (т.е. c — отрицательное целое число). Кроме того, он отрицателен ровно в k целых точках, лежащих на центральном сечении.

Поэтому если сделать проективное преобразование поля $V(\mathbf{m})$ с гиперплоскостью $\Gamma_\infty = \{\sum x_i + L_k = \rho\}$, то характеристика ind для полученного поля будет равна по модулю числу $\Pi(\mathbf{m}) - 2k$. Изменяя k от 0 до $\Pi(\mathbf{m})$, мы получим поля со всевозможными незапрещенными значениями характеристики ind (ср. [7]).

Покажем, как изменить полином P_0 из п. 4.2, чтобы характеристика $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ преобразованного поля равнялась по модулю числу $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$. Полином P_0 из п. 4.2 имеет вид

$$P_0 = \left(\sum x_i - \rho - \frac{1}{2}\right) R,$$

где

$$R = (-1)^q \prod_{k \in J} \left(\sum x_i - \rho + \frac{1}{2} - k\right), \quad J = \{-1, \pm 2, \dots, \pm q\}.$$

Положим теперь

$$P_{0,k} = \left(\sum x_i - \rho - L_k\right) R$$

(при $k = 0$ полином L_k можно выбрать тождественно равным $1/2$, при этом полином $P_{0,k}$ будет совпадать с полиномом P_0).

Утверждение. *Знак полинома*

$$P_{0,k}\left(\sum x_i - \rho + L_k\right)$$

в каждой целой точке параллелепипеда $\Delta(\mathbf{m})$ не зависит от выбора k.

Доказательство. Указанный полином равен $R((\sum x_i - \rho)^2 - L_k^2)$. Полином R не зависит от k, а второй сомножитель отрицателен во всех целых точках, лежащих на центральном сечении параллелепипеда $\Delta(\mathbf{m})$, и положителен во всех остальных целых точках этого параллелепипеда. •

Рассмотрим пару $\widetilde{V}, \widetilde{P}_{0,k}$, получающуюся из пары $V(\mathbf{m}), P_{0,k}$ проективным преобразованием с $\Gamma_\infty = \{\sum x_i + L_k = \rho\}$. Из утверждения вытекает, что модули характеристик пары $\widetilde{V}(\mathbf{m}), \widetilde{P}_{0,k}$ принимают следующие значения: $|\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-| = \Pi(\mathbf{m}, m_0)$, $|\mathrm{ind}| = |\Pi(\mathbf{m}) - 2k|$.

4.4. В этом пункте мы построим при $m_0 > 0$ невырожденные пары V, P_0 мультистепени $\mathbf{m}, m_0$, для которых V имеет фиксированный допустимый индекс ind, а характеристика $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ пробегает все допустимые значения, т. е. все через один значения от $-\Pi(\mathbf{m}, m_0)$ до $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$. При этом мы по-прежнему ограничиваемся мультистепенями $\mathbf{m}, m_0$, для которых $m_1 + \dots + m_n \equiv n \mod 2$, $m_0 \equiv 0 \mod 2$.

В п. 4.3 построены пары $\widetilde{V}, \widetilde{P}_{0,k}$ с любым допустимым значением индекса ind векторного поля $\widetilde{V}$ и с экстремальным значением характеристики $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$. Пара $\widetilde{V}, \widetilde{P}_{0,k}$ строилась как проективное преобразование пары $V(\mathbf{m}), P_{0,k}$. Фиксируем это проективное преобразование и поле $V(\mathbf{m})$. Имеем

$$P_{0,k} = \left(\sum x_i - \rho - L_k\right) R = \left(\sum (1 - a_i) x_i - \rho + t\right) R.$$

Покажем, что, меняя первый множитель полинома $P_{0,k}$, можно добиться того, чтобы преобразованная пара имела любое допустимое значение характеристики $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$.

Чуть пошевелив, если надо, коэффициенты a_i, можно считать, что полином

$$Q_t = \sum(1 - a_i)x_i - \rho + t$$

принимает различные значения во всех особых точках поля $V(\mathrm{m})$. При увеличении параметра t характеристика $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ преобразованной пары будет меняться лишь в критические моменты t, для которых гиперплоскость $Q_t = 0$ проходит через особую точку поля $V(\mathrm{m})$. При прохождении параметра через эти критические значения к характеристике $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ преобразованной пары будет прибавляться число ± 2. При достаточно большом значении параметра t полином Q_t будет положителен во всех особых точках поля $V(\mathrm{m})$. Заменим Q_t на полином $T_c = c - \sum(1-a_i)x_i$, где c столь велико, что полином T_c положителен во всех особых точках поля $V(\mathrm{m})$. Характеристика $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ преобразованной пары при такой замене не изменится. Постепенно изменим параметр c до значения $\rho - t$. В результате всего процесса полином $P_{0,k}$ изменит знак. Значит, изменит знак и характеристика $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ преобразованной пары. Каждое локальное изменение характеристики есть прибавление плюс или минус двух. Поэтому, проведя описанный процесс, мы построили пары со всеми допустимыми значениями характеристики $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$.

§5. Доказательство теоремы 2

В п. 5.1 показывается, что неравенство из теоремы 2 вытекает из результатов статьи [7] (краткое описание основных результатов этой статьи можно найти в §2). В п. 5.2–5.4 описывается построение примеров. В п. 5.2 показывается, что достаточно построить примеры с максимально большим по модулю числом $\mathrm{ind}(P, M, a)$. В п. 5.3 описывается вспомогательная конструкция утолщения алгебраической гиперповерхности при помощи области с алгебраической границей, имеющей вдвое большую степень. В п. 5.4 заканчивается построение примеров при помощи конструкций из §2 и 3.

5.1. Доказательство неравенств теоремы 2. Пусть P_0 — полином такой, что M — это поверхность $P_0 = 0$. Выберем знак полинома P_0 так, чтобы полином P_0 был положительным внутри компактной области, ограниченной поверхностью M. Чуть изменив, если нужно, коэффициенты полиномов $P_i - a_i$ (где a_i — i-я координата точки a), можно добиться того, чтобы поле $P - a$ имело лишь изолированные особые точки, а число $\mathrm{Ind}(P, M, a)$ осталось бы прежним. В этом случае $\mathrm{Ind}(P, M, a)$ равняется характеристике ind^+ пары $(P - a, P_0)$. Неравенство из теоремы 2 теперь сводится к теореме 1 из статьи [7]. Действительно, полиномы $P_i - a_i$ можно рассматривать как полиномы степени m_i (даже если они в действительности имеют меньшие степени). Чуть изменив коэффициенты этих полиномов, можно добиться того, чтобы пара $P - a, P_0$ стала невырожденной парой мультистепени $\mathbf{m}, m_0$. Из теоремы 1 статьи [7] получаем оценку

$$|\operatorname{Ind}(P - a, M, 0)| \le O(\mathbf{m}, m_0).$$

При этом если $m_0 + \cdots + m_n \not\equiv n \mod 2$, то

$$O(\mathbf{m}, m_0) = O(\mathbf{m}, m_0 - 1).$$

Осталось еще доказать неравенство

$$|\operatorname{Ind}(P - a, M, 0)| \le O(\mathbf{m} + 1_j, m_0 - 1) \quad \text{при } m_0 + \cdots + m_n \equiv n \mod 2.$$

В этом случае, рассматривая полином P_j как полином степени $m_j + 1$, получаем неравенство

$$|\operatorname{Ind}(P - a, M, 0)| \le O(\mathbf{m} + 1_j, m_0).$$

Осталось заметить, что при $m_0 + \cdots + m_n \equiv n \mod 2$ справедливо равенство

$$O(\mathbf{m} + 1_j, m_0) = O(\mathbf{m} + 1_j, m_0 - 1).$$

5.2. Утверждение. *Пусть для некоторой компактной гиперповерхности M степени m_0 и некоторого целого числа* Ind *существует векторное поле P мультистепени $\mathbf{m}$ такое, что* $\operatorname{Ind}(P, M, a) = \operatorname{Ind}$. *Тогда для гиперповерхности M и всякого целого числа q такого, что* $|q| \le |\operatorname{Ind}|$, *существует поле P мультистепени $\mathbf{m}$ с* $\operatorname{Ind}(P, M, a) = q$.

Действительно, не ограничивая общности, можно считать, что точка a — это начало координат. Изменив знак у одной из компонент поля P, мы получим пример поля с индексом $-\operatorname{Ind}$. Утверждение теперь вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Пусть M — компактная ограниченная гладкая алгебраическая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ и пусть $P\colon M \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение такое, что*

$$\operatorname{Ind}(P, M, 0) = \operatorname{Ind}.$$

Тогда существуют векторы $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ и число λ такие, что при изменении параметра t от 0 до $+\infty$ число $\operatorname{Ind}(P_t, M, 0)$, где $P_t = P(\lambda x + at) + \varepsilon$, принимает все целые значения между Ind *и* 0. (*При этом если M неприводима, то можно положить λ равным* 1).

Доказательство. 1. *Выбор вектора ε.* Вектор ε выберем столь малым, чтобы выполнялось равенство

$$\operatorname{Ind}(P + \varepsilon, M, 0) = \operatorname{Ind}(P, M, 0),$$

а поле $P + \varepsilon$ имело лишь некратные особые точки.

2. *Выбор числа λ.* Скажем, что ненулевой вектор $r \in \mathbb{R}^n$ *запрещен*, если при параллельном переносе одной из неприводимых компонент гиперповерхности M на вектор r получается другая ее компонента. Множество запрещенных векторов R конечно: если параллельный перенос совмещает две компоненты, то он совмещает их центры тяжести. Пусть X — конечное множество особых точек поля $P + \varepsilon$. Число λ выберем таким, что

а) ни для какой пары различных особых точек $x_i, x_j \in X$ не выполняется включение
$$\lambda^{-1}(x_i - x_j) \in R;$$

б) λ столь близко к единице, что
$$\operatorname{Ind}(P \circ \lambda E + \varepsilon, M, 0) = \operatorname{Ind}(P, M, 0),$$
где $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — тождественный оператор. Если гиперповерхность M неприводима, то $R = \varnothing$ и можно положить $\lambda = 1$.

3. *Выбор вектора a.* Для любых двух разных элементов $x_i, x_j \in X$ рассмотрим поверхность
$$(M - \lambda^{-1}x_i) \cap (M - \lambda^{-1}x_j).$$

Ее размерность (в силу выбора числа λ) меньше, чем $n - 1$. Обозначим через C_{ij} вещественный конус над этой поверхностью. Размерность этого конуса не превосходит $n - 1$. Обозначим через C объединение конусов C_{ij} для всех пар (x_i, x_j) различных элементов множества X. В качестве a возьмем любой вектор, не лежащий в C.

4. Перейдем к доказательству леммы. Особые точки поля
$$P_t = P(\lambda x + at) + \varepsilon$$
имеют вид
$$x_i^t = \lambda^{-1}x_i - \lambda^{-1}at,$$

где $x_i \in X$. Ни при каком вещественном t различные точки x_i^t и x_j^t не могут одновременно попасть на гиперповерхность M. Действительно, если $x_i^t, x_j^t \in M$, то

$$-\lambda^{-1}at \in (M - \lambda^{-1}x_j) \cap (M - \lambda^{-1}x_j),$$

что противоречит выбору вектора a. При достаточно большом $t > t_0$ все точки x_i^t лежат вне области, ограниченной гиперповерхностью M, и, следовательно,

$$\mathrm{Ind}(P_t, M, 0) = 0.$$

Далее, справедливо равенство $\mathrm{Ind}(P_0, M, 0) = \mathrm{Ind}$. При изменении параметра t число $\mathrm{Ind}(P_t, M, 0)$ меняется, когда некоторая точка x_i^t пересекает гиперповерхность M. Различные точки x_i^t и x_j^t не пересекают гиперповерхность M одновременно, и поэтому после пересечения индекс либо не меняется, либо меняется ровно на единицу. Отсюда и вытекает лемма. •

5.3. Для построения примеров нам будет нужна описанная ниже конструкция утолщения алгебраической гиперповерхности при помощи области с алгебраической границей вдвое большей степени.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ поверхность Γ и область U с компактным замыканием. Скажем, что множество $f \geq 0$ *утолщает* Γ *в области* U *не шире, чем на* ε, если

1) точки из $\Gamma \cap \overline{U}$ лежат строго внутри множества $f \geq 0$;
2) каждая точка из пересечения множества $f \geq 0$ с $\overline{U}$ отстоит от некоторой точки из $\Gamma \cap \overline{U}$ не далее, чем на ε.

Утверждение 1. *Пусть* Γ *— множество нулей полинома* P *степени* k *в области* U *с компактным замыканием в пространстве* $\mathbb{R}^n$. *Тогда для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует полином* f *степени* $2k$ *такой, что*

1) *его поверхность нулевого уровня* $f = 0$ *неособа;*
2) *множество* $f \geq 0$ *компактно;*
3) *множество* $f \geq 0$ *утолщает поверхность* Γ *в области* U *не шире, чем на* ε.

Доказательство. Полином f можно выбрать в виде

$$f = -P^2 + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 r^2,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — малые положительные числа, а $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ (сначала выбирается малое ε_1, а затем $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$; член $-\varepsilon_2^2 r^2$ обеспечивает компактность области $f \geq 0$).

Утверждение 2. *Пусть в условиях утверждения* 1 *поверхность* Γ — *либо неособая цилиндрическая, либо график функции (т.е. можно так выбрать координаты, что полином* P *либо не зависит от координаты* x_n*, либо имеет вид* $P = x_n - Q(x_1, \dots, x_{n-1})$*). Тогда полином* f *можно выбрать так, чтобы существовало обратимое полиномиальное отображение* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *степени* k*, переводящее поверхность* $f = 0$ *в сферу, а область* $f \geq 0$ — *в шар.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда Γ — график функции, т.е. $P = x_n - Q(x_1, \dots, x_{n-i})$. В этом случае f можно выбрать в виде

$$f = -P^2 + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2).$$

Диффеоморфизм φ, переводящий точку $x = x_1, \dots, x_n$ в точку $\varphi(x) = x_1, \dots, x_{n-1}, \varepsilon_2^{-1}P(x)$, переводит область $f \geq 0$ в шар $\varepsilon_2^2(x_1^2 + \dots + x_n) \leq \varepsilon_1^2$, а поверхность $f = 0$ — в сферу $\varepsilon_2^2(x_1^2 + \dots + x_n) = \varepsilon_1^2$.

Случай цилиндрической поверхности сводится к случаю графика функции. Действительно, в любой компактной области U неособую цилиндрическую поверхность $Q(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$ можно сколь угодно близко аппроксимировать графиком функции $\varepsilon^{-1}Q(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_n$. После этого можно воспользоваться приведенной выше конструкцией. •

Следствие. *Пусть в условиях утверждения* 1 *поверхность* Γ *состоит из* k *параллельных гиперплоскостей и пусть* $n > 1$*. Тогда полином* f *можно выбрать так, чтобы существовало обратимое полиномиальное отображение* $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, переводящее поверхность* $f = 0$ *в сферу, а область* $f \geq 0$ — *в шар. При* $k = 1$ *полином* f *можно выбрать так, чтобы поверхность* $f = 0$ *была эллипсоидом.*

Доказательство. При $n > 1$ объединение параллельных гиперплоскостей является неособой цилиндрической поверхностью, поэтому можно воспользоваться утверждением 2. Если $k = 1$, то обратимое полиномиальное преобразование φ, построенное в утверждении 2, имеет степень 1 и потому является аффинным. Аффинное преобразование переводит сферу в эллипсоид. •

5.4. Построим сначала поле V мультистепени m, имеющее в $\mathbb{R}^n$ лишь изолированные особые точки, и такие q параллельных гиперплоскостей, что модуль суммарного индекса особых точек поля V, лежащих на этих гиперплоскостях, равен $O(\mathrm{m}, 2q - 1)$.

1. Случай $m_1 + \dots + m_n \not\equiv n \mod 2$. В этом случае достаточно взять поле $V(\mathrm{m})$, определенное в §4, и q гиперплоскостей, заданных уравнениями

$$\sum x_i = \rho - \frac{1}{2} + c(j),$$

где $j = 0, \dots, q-1$, а $c(j) = -j$, если j четно, и $c(j) = j + 1$, если j нечетно.

2. Случай $m_1 + \cdots + m_n \equiv n \mod 2$. Возьмем поле $V(\mathbf{m})$ и q гиперплоскостей $\sum x_i = \rho + (-1)^j j$, где $j = 0, \ldots, q-1$. Затем подвергнем поле $V(\mathbf{m})$ и множество гиперплоскостей проективному преобразованию, для которого гиперплоскость Γ_∞ определяется уравнением

$$\sum x_i = \rho - \frac{1}{2}.$$

При таком проективном преобразовании пучок параллельных гиперплоскостей $\sum x_i = l$ переходит в себя. Построение закончено.

Закончим описание примеров к теореме 2. В силу утверждения 5.2 достаточно построить гиперповерхность M степени $2q$ и отображение $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\mathrm{Ind}(P, M, 0) = O(\mathbf{m}, 2q-1)$$

и мультистепень отображения P равна $\mathbf{m}$. В качестве P достаточно взять отображение, компоненты которого совпадают с компонентами построенного выше векторного поля V, а в качестве M — границу области $f \geq 0$, утолщающей в достаточно большом шаре q построенных параллельных гиперплоскостей, где f — полином степени $2q$, шар настолько велик, что содержит все особые точки поля V, а ε равно половине минимального расстояния между объединением q гиперплоскостей и объединением особых точек поля V, не лежащих на этих гиперплоскостях. Согласно следствию из п. 5.3, такой полином f существует, причем его можно выбрать так, чтобы поверхность $f = 0$ переводилась в сферу полиномиальным преобразованием пространства $\mathbb{R}^n$. •

§6. Индекс особой точки неоднородного поля

Скажем, что последовательность векторных полей *локализует* в некоторой точке a индекс k, если у точки a существует окрестность U, в которой каждое поле имеет лишь изолированные особые точки суммарного индекса k, причем для каждого $\varepsilon > 0$ поля с достаточно большими номерами не имеют особых точек в области $U \setminus \overline{U}_\varepsilon$, где U_ε — ε-окрестность точки a. (Аналогично определяется локализация индекса для полей, зависящих от параметра, при стремлении параметра к некоторому фиксированному значению). Отметим, что последовательность полей, локализующая в точке a некоторый индекс, может стремиться к полю, для которого точка a не является изолированной и лежит на особом множестве ненулевой размерности.

Теорема 3. *Последовательность полиномиальных векторных полей мультистепени, не превосходящей* $\mathbf{m}$, *не может ни в одной точке локализовать индекс, по* *модулю больший, чем* $O(\mathrm{m}, 1)$. *Эта оценка точна для всех мультистепеней* m. *Если, кроме того,*

$$m_1 + \cdots + m_n \not\equiv n \mod 2,$$

то существуют последовательности векторных полей мультистепени m, *локализующие в точке* 0 *любой индекс от* $-O(\mathrm{m}, 1)$ *до* $O(\mathrm{m}, 1)$.

Теорема 3′. *Модуль индекса изолированной особой точки полиномиального векторного поля мультистепени, не превосходящей* m, *не превосходит* $O(\mathrm{m}, 1)$. *Если, кроме того,*

$$m_1 + \cdots + m_n \equiv n \mod 2,$$

то эта оценка точна.

Доказательство неравенств из теоремы 3 основано на результатах статьи [7] и использует следующую лемму.

Лемма. *Пусть последовательность векторных полей мультистепени, не превосходящей* m, *локализует в некоторой точке* a *индекс* k. *Тогда существует алгебраически зависящее от параметра* t, $0 < t < 1$, *векторное поле* P^t *мультистепени* m, *которое при* $t \to 0$ *локализует в точке* a *индекс* k *и, кроме того, при каждом* t *имеет лишь изолированные особые точки и не имеет бесконечно удаленных особых точек.*

Лемма обычным образом выводится из теоремы Зайденберга–Тарского, поэтому мы не останавливаемся на ее доказательстве. •

Перейдем к доказательству теорем 3 и 3′. Неравенства теоремы 3′ содержатся в неравенствах теоремы 3. Докажем последние.

1. Случай $m_1 + \cdots + m_n \not\equiv n \mod 2$. В этом случае индекс полиномиального векторного поля V в любом шаре не превосходит по модулю числа $O(\mathrm{m}, 1)$, если поле имеет в шаре лишь изолированные особые точки. Это вытекает из теоремы 2, примененной к гиперповерхности $\sum(x_i - a_i)^2 = r^2$ и отображению, компоненты которого совпадают с компонентами поля V. Поэтому последовательность векторных полей мультистепени m не может локализовать индекс, больший по модулю, чем $O(\mathrm{m}, 1)$. Далее, в теореме 2 содержатся и все примеры, нужные в рассматриваемом случае. Действительно, в соответствующих примерах к этой теореме в качестве поверхности $f = 0$ можно взять эллипсоид (см. следствие в п. 5.3), а эллипсоид аффинным преобразованием переводится в сферу.

2. Случай $m_1 + \dots + m_n = n \mod 2$. Допустим, что существует последовательность векторных полей, локализующая в точке a индекс, больший по модулю числа $O(\mathbf{m}, 1)$. Согласно лемме, существует алгебраически зависящее от параметра t, $0 < t < 1$, семейство невырожденных полей V^t мультистепени $\mathbf{m}$, локализующее при $t \to 0$ в точке a тот же индекс. Особые точки a^t поля V^t при $t \to 0$ будут стремиться к конечному множеству точек A проективного пространства (т.е. к конечному множеству точек в $\mathbb{R}^n$ и к конечному числу бесконечно удаленных точек). Рассмотрим полосу U_0 между любыми двумя параллельными плоскостями, на которые наложено единственное условие: U_0 не содержит ни конечных, ни бесконечно удаленных точек множества A, за исключением единственной точки a, которую полоса U_0 должна содержать строго внутри себя.

При достаточно малом t в полосе U_0 будут лежать лишь те особые точки поля V^t, которые стремятся к точке a. Применяя лемму 2 из §7 статьи [7] для пары $V, 1$ и характеристики ind, получаем, что суммарный индекс особых точек поля V^ρ в полосе U_0 не превосходит по модулю числа $O(m, 1)$. Полученное противоречие доказывает требуемое неравенство.

3. Нам осталось привести примеры к теоремам 3′ и 2 в случае $m_1 + \dots + m_n \equiv n \mod 2$. Такие примеры доставляются векторными полями с однородными компонентами (см. теорему 1). •

§7. Неравенства Петровского–Олейник и неравенства Арнольда

В. И. Арнольд [1] нашел неожиданное обобщение неравенств Петровского–Олейник [5] и дал их красивое доказательство, использующее формулу Левина–Эйзенбуда–Химшиашвили для индекса особой точки векторного поля [8–10]. Несмотря на внешнее различие, доказательства Арнольда и Петровского–Олейник вполне параллельны и очень близки. Работа [7] возникла из анализа их взаимосвязи. В настоящем параграфе комментируется связь статьи [7] с каждым из этих доказательств.

Отметим, что центральный результат статьи [7] — построение примеров, доказывающих точность найденных неравенств, — не имеет аналогов в работах [1, 5] и в этом параграфе не комментируется.

7.1. Неравенства Петровского–Олейник и неравенства из статьи [7]. В основополагающей работе И. Г. Петровского и О. А. Олейник [5] оцениваются эйлеровы характеристики алгебраических множеств. Все эти неравенства являются частными случаями неравенств из [7]. Поясним, в чем здесь дело. Начнем с примера.

Утверждение. *Пусть $P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — полином степени k, для которого поверхность $P = 0$ неособа и области $P < c$ компактны при всех $c \in \mathbb{R}$. Тогда эйлерова* *характеристика χ области $P < 0$ удовлетворяет неравенству*

$$|1-2\chi| \le \Pi(\mathbf{m}, k-1),$$

где $\mathbf{m} = \underbrace{k-1, \dots, k-1}_{n \text{ раз}}$.

Доказательство. Рассмотрим пару, состоящую из поля $V = \operatorname{grad} P$ мультистепени $\mathbf{m}$ и полинома $-P$ степени k. Согласно элементарной теории Морса, $\chi = \operatorname{ind}^+$ и $1 = \chi(\mathbb{R}^n) = \operatorname{ind}^+ + \operatorname{ind}^-$. Далее, в особых точках поля V полиномы $-P$ и

$$Q = -P + \frac{1}{k}\sum x_i P'_{x_i}$$

совпадают и поэтому пары $V, -P$ и V, Q имеют одинаковые характеристики $\operatorname{ind}^{\pm}$. По формуле Эйлера для однородных функций полином Q имеет степень $k-1$. Воспользовавшись теперь теоремой 1 из [7], получим неравенство

$$|\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-| \le \Pi(\mathbf{m}, k-1);$$

учитывая соотношения $\operatorname{ind}^+ + \operatorname{ind}^- = 1$ и $\chi = \operatorname{ind}^+$, получаем нужное неравенство

$$|1-2\chi| \le \Pi(\mathbf{m}, k-1).$$

Исходные неравенства Петровского–Олейник оценивают сверху следующие величины:

а) для вещественной проективной гиперповерхности четной размерности — модуль уменьшенной на единицу ее эйлеровой характеристики;

б) для вещественной проективной гиперповерхности нечетной размерности и четной степени — модуль уменьшенной на единицу удвоенной эйлеровой характеристики подмножества проективного пространства, ограниченного рассматриваемой гиперповерхностью и соответствующего отрицательным значениям задающего ее полинома.

Как и в приведенном выше утверждении, эти оценки сводятся к оценкам характеристик $\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-$ и ind^+ пары $\operatorname{grad} P, -P$ для невырожденного полинома P. Пары $\operatorname{grad} P, -P$ и $\operatorname{grad} P, Q$, где $Q = -P - \frac{1}{k}\sum x_i P'_{x_i}$, имеют одинаковые характеристики $\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-$ и ind^+ (см. доказательство предыдущего утверждения). С учетом этого замечания неравенства Петровского–Олейник во всех случаях представляют собой частный случай неравенств статьи [7]. Доказательства неравенств статьи [7] — это модернизация рассуждений Петровского–Олейник и перенесение их в более общую ситуацию (в которой поле V не обязательно равно $\operatorname{grad} P$, а полином Q не обязательно равен полиному $-P$).

7.2. Неравенства Арнольда и неравенства статьи [7]. В. И. Арнольд [1] заметил, что как в случае а), так и в случае б) оцениваемые величины в исходных неравенствах Петровского–Олейник (см. предыдущий пункт) равны модулю индекса градиента однородного полинома $\overline{P}$ от $n+1$ переменных в точке нуль. Доказательство из статьи [7] очень похоже на доказательство В. И. Арнольда и возникло в результате его обдумывания. В обоих доказательствах оцениваемые величины представляются как сигнатуры квадратичных форм, а сигнатура квадратичной формы оценивается по размерности максимального подпространства, на котором форма тождественно равна нулю. Однако если в доказательстве Арнольда существование большого нулевого подпространства очевидно, то в доказательстве из [7] оно опирается на совершенно неочевидную формулу Эйлера–Якоби (см., например, [4, 6]).

Роль формулы Эйлера–Якоби в доказательстве Арнольда заключается в следующем. Квадратичная форма из формулы Левина–Эйзенбуда–Химшиашвили, которая встречается в этом доказательстве, является пределом квадратичных форм, встречающихся в [7]. Доказательство существования этого предела опирается на формулу Эйлера–Якоби (см. [8]).

Неравенства из [7] для проективно инвариантных характеристик представляют собой аффинную переформулировку неравенств Арнольда. Неравенства для проективно антиинвариантных характеристик впервые были получены в статье [7]. Эти неравенства можно переформулировать как ограничения на краевой индекс 1-формы с однородными компонентами (ср. [2] и §2) и доказать их при помощи формулы Левина–Эйзенбуда–Химшиашвили (см. [2]).

§8. Геометрия чисел $\Pi(\mathbf{m})$, $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$ и $O(\mathbf{m}, m_0)$

Числа $\Pi(\mathbf{m})$, $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$ и $O(\mathbf{m}, m_0)$ играют существенную роль как в настоящей статье, так и в неравенствах Петровского–Олейник, в неравенствах Арнольда и в неравенствах из статьи [7]. Здесь мы обсудим свойства этих чисел.

8.1. Числа $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$ **и** $\Pi(m)$. Функции $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$ и $\Pi(\mathbf{m})$ определены для целочисленных значений входящих в них аргументов. Непосредственно из определения вытекают следующие факты.

1. $\Pi(\mathbf{m}, m_0) = 0$ и $\Pi(\mathbf{m}) = 0$, если хотя бы одна компонента вектора $\mathbf{m}$ неположительная.

2. $\Pi(\mathbf{m}, m_0) = 0$, если число m_0 отрицательно.

3. $\Pi(\mathbf{m}, 0) = \Pi(\mathbf{m})$.

4. Если $m_1 + \cdots + m_n \neq n \mod 2$, то $\Pi(\mathbf{m}) = 0$.

5. Числа $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$ и $\Pi(\mathbf{m})$ не меняются от перестановки компонент вектора $\mathbf{m}$. (Действительно, пусть векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{q}$ различаются лишь перестановкой компонент. Тогда соответствующая перестановка координат в пространстве $\mathbb{R}^n$

переводит параллелепипед $\Delta(\mathbf{m})$ в параллелепипед $\Delta(\mathbf{q})$, оставляет инвариантными все гиперплоскости $x_1+\dots+x_n=c$ и переводит целые точки в целые).

6. Число $\Pi(\mathbf{m},m_0)$ не убывает при увеличении m_0, т.е. если $m_0^1>m_0$, то $\Pi(\mathbf{m},m_0^1)\geq\Pi(\mathbf{m},m_0)$.

7. Если $m_0+m_1+\dots+m_n\equiv n \mod 2$, то $\Pi(\mathbf{m},m_0)=\Pi(\mathbf{m},m_0+1)$.

8. Если $m_0+\dots+m_n\not\equiv n \mod 2$, то $\Pi(\mathbf{m},m_0)=\Pi(\mathbf{m},m_0-1)$.

Утверждение. *Пусть* $m_0+m_1+\dots+m_n\not\equiv n \mod 2$. *Тогда* $\Pi(\mathbf{m},m_0)=\Pi(\overline{\mathbf{m}})$, *где* $\overline{\mathbf{m}}=m_0,m_1,\dots,m_n$.

Следствие 1. *Пусть* $m_0+m_1+\dots+m_n\equiv n \mod 2$. *Обозначим через* $\overline{\mathbf{m}}+1_0$ *вектор* $m_0+1,m_1,\dots,m_n$. *Тогда справедливо равенство* $\Pi(\mathbf{m},m_0)=\Pi(\overline{\mathbf{m}}+1_0)$.

Следствие 2. *Пусть* $m_0+m_1+\dots+m_n\not\equiv n \mod 2$. *Тогда справедливы равенство* $\Pi(\mathbf{m},m_0)=\Pi(\mathbf{q},m_1)$, *где* $\mathbf{q}=m_0,m_2,\dots,m_n$, *а также серия равенств, получающихся из него перестановкой компонент вектора* $\mathbf{m}$.

Следствие 3. *Пусть* $m_0+\dots+m_n\equiv n \mod 2$. *Тогда справедливы равенство* $\Pi(\mathbf{m},m_0)=\Pi(\mathbf{q},m_1-1)$, *где* $\mathbf{q}=m_0+1,m_2,\dots,m_n$, *а также серия равенств, получающихся из него перестановкой компонент вектора* $\mathbf{m}$.

Доказательство утверждения. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}$ параллелепипед $\Delta(\overline{\mathbf{m}})$, заданный неравенствами $0\leq y_0\leq m_0-1,\dots,0\leq y_n\leq m_n-1$, и его сечение

$$y_0+y_1+\dots+y_n=\frac{1}{2}\left(\sum_{i\geq0}m_i-n-1\right).$$

Спроектируем $\Delta(\overline{\mathbf{m}})$ вдоль оси y_0 в параллелепипед $\Delta(\mathbf{m})\subset\mathbb{R}^n$. Поскольку на сечении справедливо равенство

$$y_0=\frac{1}{2}\left(\sum_{i\geq0}m_i-n-1\right)-(y_1+\dots+y_n), \tag{$*$}$$

то его проекция удовлетворяет неравенствам

$$0\leq\frac{1}{2}\left(\sum_{i\geq0}m_i-n-1\right)-(y_1+\dots+y_n)\leq m_0-1,$$

или, что то же, неравенствам

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i>0}m_i-n-m_0\right)+\frac{1}{2}\leq y_1+\dots+y_n\leq\frac{1}{2}\left(\sum_{i>0}m_i-n+m_0\right)-\frac{1}{2}.$$

Из условия доказываемого утверждения вытекает, что числа $\sum_{i>0} m_i - n - m_0$ и $\sum_{i>0} m_i - n + m_0$ — нечетные и, следовательно, в области целых чисел написанные выше неравенства эквивалентны неравенствам

$$\frac{1}{2}\Big(\sum_{i>0} m_i - n - m_0\Big) \le y_1 + \cdots + y_n \le \frac{1}{2}\Big(\sum_{i>0} m_i - n + m_0\Big).$$

Далее, над каждым целочисленным решением этих неравенств в параллелепипеде $\Delta(\mathrm{m})$ лежит в точности одна целочисленная точка параллелепипеда $\Delta(\overline{\mathrm{m}})$, координата y_0 которой определяется соотношением $(*)$. Утверждение доказано. •

8.2. Монотонность функций $\Pi(\mathrm{m}, m_0)$ и $\Pi(\mathrm{m})$.

Утверждение. *Пусть* (m^1, m_0^1) *и* (m^2, m_0^2) — *две мультистепени такие, что* $m_i^1 \ge m_i^2$ *и* $m_0^1 \ge m_0^2$. *Тогда* $\Pi(\mathrm{m}^1, m_0^1) \ge \Pi(\mathrm{m}^2, m_0^2)$, *если дополнительно выполнено одно из следующих условий*:

1) $m_0^1 + \cdots + m_n^1 \equiv m_0^2 + \cdots + m_n^2 \mod 2$;
2) $m_0^1 + \cdots + m_n^1 \equiv n \mod 2$;
3) $m_0^1 + \cdots + m_n^1 \not\equiv n \mod 2$ *и* $m_0^1 > m_0^2$.

Доказательство. 1) Достаточно доказать утверждение, предполагая, что $\sum m_i^1 - \sum m_i^2 = 2$. В частности, это означает, что все числа m_i^1, за исключением не более чем двух из них, равны числам m_i^2. Далее, можно считать, что числа m_0^1 и m_0^2 находятся среди исключительных. Действительно, в противном случае можно поменять компоненты, пользуясь либо следствием 2, либо следствием 3. Преобразования из следствий 2 и 3 не меняют суммы компонент и для мультистепени с одинаковой четностью сохраняют неравенства между компонентами. В том случае, когда нулевая компонента является единственно исключительной, т.е. $m_0^1 \ge m_0^2$ и $m_i^1 = m_i^2$ при $i > 0$, утверждение очевидно. Пусть исключительных координат ровно две и одна из них имеет нулевой номер. В этом случае число $\Pi(\mathrm{m}^2, m_0^2)$ — это число целых точек параллелепипеда $\Delta(\mathrm{m}^2)$, удовлетворяющих неравенствам $A \le y_1 + \cdots + y_n \le B$, где

$$A = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i>0} m_i^2 - n - m_0^2\Big) \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i>0} m_i^2 - n + m_0^2\Big).$$

Число $\Pi(\mathrm{m}^1, m_0^1)$ — это число целых точек параллелепипеда $\Delta(\mathrm{m}^1)$, удовлетворяющих неравенствам $A \le y_1 + \cdots + y_n \le B + 1$. Нужное неравенство теперь очевидно, так как $\Delta(\mathrm{m}^1) \supseteq \Delta(\mathrm{m}^2)$.

2) При $m_0^1 + \cdots + m_n^1 \equiv n \mod 2$ справедливо равенство

$$\Pi(\mathbf{m}^1, m_0^1) = \Pi(\mathbf{m}^1, m_0^1 + 1),$$

и утверждение вытекает из п. 1) для мультистепени $(\mathbf{m}^1, m_0^1)$ или для мультистепеней $(\mathbf{m}^1, m_0^1 + 1)$ и $(\mathbf{m}^2, m_0^2)$.

3) При $m_0^1, m_0^1 \not\equiv n \mod 2$ справедливо равенство $\Pi(\mathbf{m}^1, m_0^1) = \Pi(\mathbf{m}^1, m_0^1 - 1)$, и утверждение вытекает из п. 2) для мультистепеней $(\mathbf{m}^1, m_0^1 - 1)$ и $(\mathbf{m}^2, m_0^2)$.

Замечание. Если в условиях п. 3 доказанного утверждения $m_0^1 = m_0^2$, то нельзя утверждать, что $\Pi(\mathbf{m}^1, m_0^1) \geq \Pi(\mathbf{m}^2, m_0^2)$. Действительно, все числа $\Pi(\mathbf{m}^1, 0)$ — нулевые:

$$\Pi(\mathbf{m}^1, 0) \equiv 0$$

(так как по условию $m_1^1 + \cdots + m_n^1 \not\equiv n \mod 2$), однако все числа $\Pi(\mathbf{m}^2, 0)$ с $m_1^2 + \cdots + m_n^2 \equiv n \mod 2$ и $m_i > 0$ положительны.

8.3. Об аналитической формуле для чисел $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$. Не существует полинома от чисел $m_0, m_1, \ldots, m_n$, равного $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$. Это вытекает из того, что при наличии отрицательных компонент вектора $\mathbf{m}$ число $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$ равно нулю (но для некоторых векторов оно не равно 0). В некотором смысле функция $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$ кусочно-полиномиальна. Мы не будем на этом останавливаться, так как встречающиеся полиномы весьма сложны. Отметим лишь следующий очевидный факт.

Утверждение 1. *Если* $m_0 \geq \sum m_i - n$ *и* $m_1 > 0, \ldots, m_n > 0$, *то* $\Pi(\mathbf{m}, m_0) = m_1, \ldots, m_n$. •

Число $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$ встречается как один из коэффициентов некоторого полинома. Остановимся на этом подробнее.

Рассмотрим параллелепипед $\Delta(\overline{\mathbf{m}})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, определенный неравенствами $0 \leq y_0 \leq m_0 - 1$, $0 \leq y_1 \leq m_1 - 1, \ldots, 0 \leq y_n \leq m_n - 1$. Обозначим через $N(\overline{\mathbf{m}}, k)$ число целых точек, лежащих на сечении $y_0 + \cdots + y_n = k$ этого параллелепипеда. Согласно утверждению из п. 8.1 и его первому следствию, имеем:

1) при $m_0 + \cdots + m_n \not\equiv n \mod 2$

$$\Pi(\mathbf{m}, m_0) = N(\overline{\mathbf{m}}, k),$$

где $k = \frac{1}{2}(\sum m_i - n - 1)$;

2) при $m_0 + \cdots + m_n \equiv n \mod 2$

$$\Pi(\mathbf{m}, m_0) = N(\overline{\mathbf{m}} + 1_0, k),$$

где $k = \frac{1}{2}(\sum m_i - n)$.

Утверждение 2. *Если все компоненты вектора* $\overline{\mathrm{m}}$ *неотрицательны, то*

$$\sum N(\overline{\mathrm{m}}, k)t^k = \prod_{0\le i\le n} \frac{t^{m_i}-1}{t-1}.$$

Следствие. *Пусть числа* $m_0, \ldots, m_n$ *положительны. Тогда число* $\Pi(\mathrm{m}, m_0)$ *равно коэффициенту при* t^k *полинома* $Q(t)$, *где*

1) *при* $m_0 + \cdots + m_n \not\equiv n \mod 2$

$$k = \frac{1}{2}\Big(\sum m_i - n - 1\Big) \quad \text{и} \quad Q(t) = \prod_{0\le i\le n} \frac{t^{m_i}-1}{t-1};$$

2) *при* $m_0 + \cdots + m_n \equiv n \mod 2$

$$k = \frac{1}{2}\Big(\sum m_i - n\Big) \quad \text{и} \quad Q(t) = \frac{t^{m_0+1}-1}{t-1} \prod_{1\le i\le n} \frac{1-t^{m_i}}{t-1}.$$

Утверждение п. 2) *справедливо и при* $m_0 = 0$.

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим полином $\overline{Q}$ от $n+1$ переменных $t_0, \ldots, t_n$, заданный формулой

$$\overline{Q} = \prod_{0\le i\le n} (1 + t_i + \cdots + t_i^{m_i-1}).$$

Ясно, что

$$\overline{Q} = \sum_{0\le k_i\le m_i-1} t_0^{k_0} \ldots t_n^{k_n}.$$

Мономы полинома $\overline{Q}$ имеют (мульти)степени, соответствующие целым точкам параллелепипеда $\Delta(\overline{\mathrm{m}})$. Полином

$$Q(t) = \prod_{0\le i\le n} \frac{t^{m_i}-1}{t-1}$$

индуцируется из полинома $\overline{Q}$ при отображении $t \mapsto t_0, \ldots, t_n$. Число целых точек на сечении $y_0 + \cdots + y_n = k$ параллелепипеда $\Delta(\overline{\mathrm{m}})$ равно коэффициенту полинома $Q(t)$ при t^k .

Утверждение 3. *Полином $N(\mathbf{m},k)t^k$ возвратен, его коэффициенты положительны и возрастают (точнее, не убывают) к середине.*

Доказательство. Покажем, что множество возвратных полиномов с положительными возрастающими к середине коэффициентами замкнуто относительно умножения. Для произведения полиномов вида $t^l + t^{l+1} + \dots + t^{n-l}$ (со всевозможными целыми n и l такими, что $0 \le l \le n/2$) это проверяется непосредственно. Далее, всякий возвратный полином P степени n с положительными коэффициентами, возрастающими к середине, представи́м в виде

$$P = \sum C_l(t^l + \dots + t^{n-l}),$$

где $C_l \ge 0$. Что и нужно было показать. •

Утверждение 3 вытекает теперь из утверждения 2. •

8.4. Число $O(\mathbf{m}, m_0)$. Число $O(\mathbf{m}, m_0)$ определяется как $\dfrac{1}{2}(\Pi(\mathbf{m}, m_0) + \Pi(\mathbf{m}))$. Используя свойства чисел $\Pi(\mathbf{m}, m_0)$ и $\Pi(\mathbf{m})$, получаем следующее

Утверждение 1.

1. *Число $O(\mathbf{m}, m_0)$ не меняется при перестановке компонент вектора $\mathbf{m}$.*
2. *Число $O(\mathbf{m}, m_0)$ не убывает при увеличении m_0, т. е. если $m_0' > m_0$, то $O(\mathbf{m}, m_0') \ge O(\mathbf{m}, m_0)$.*
3. *Если $m_0 + m_1 + \dots + m_n \equiv n \mod 2$, то $O(\mathbf{m}, m_0) = O(\mathbf{m}, m_0 + 1)$.*
4. *Если $m_0 + m_1 + \dots + m_n \not\equiv n \mod 2$, то $O(\mathbf{m}, m_0) = O(\mathbf{m}, m_0 - 1)$.*
5. *Если $m_1 + \dots + m_n \not\equiv n \mod 2$, то $O(\mathbf{m}, m_0) = \frac{1}{2}\Pi(\mathbf{m}, m_0)$.*
6. *Равенство $O(\mathbf{m}, m_0) = O(\mathbf{q}, m_1)$, где $\mathbf{q} = m_0, m_2, \dots, m_n$, справедливо, если $m_0 + \dots + m_n \not\equiv n \mod 2$ и m_0 четно.*
7. *Равенство $O(\mathbf{m}, m_0) = O(\mathbf{q}, m_1)$, где $\mathbf{q} = m_0 + 1, m_2, \dots, m_n$, справедливо, если $m_0 + \dots + m_n \equiv n \mod 2$ и m_0 нечетно.*

Согласно п. 3 и 4 этого утверждения, достаточно рассматривать числа $O(\mathbf{m}, m_0)$ с нечетным числом $m_0 = 2k - 1$. Геометрический смысл числа $O(\mathbf{m}, m_0)$ — суммарное число целых точек на k сечениях параллелепипеда $\Delta(\mathbf{m})$, имеющих вид $y_1 + \dots + y_n = [\rho] - j$, $j = 0, 1, \dots, k-1$,, где $[\rho]$ есть целая часть числа $\rho = \frac{1}{2}(\sum m_i - n)$. Действительно, в определении числа $O(\mathbf{m}, m_0)$ фигурируют неравенства $\rho - m_0/2 \le y_1 + \dots + y_n \le \rho$. При нечетном $m_0 = 2k - 1$ и целом 2ρ отрезок на вещественной прямой с концами $\rho - \frac{1}{2}m_0$ и ρ содержит ровно k целых точек, а именно точки $[\rho], [\rho] - 1, \dots, [\rho] - k + 1$.

Утверждение 2 (о монотонности числа $O(\mathbf{m}, m_0)$). *Пусть* $(\mathbf{m}^1, m_0^1)$ *и* $(\mathbf{m}^2, m_0^2)$ *— две мультистепени такие, что* $m_i^1 \geq m_i^2$, $i = 1, \ldots, n$, *числа* m_0^1 *и* m_0^2 *нечетны и* $m_0^1 \geq m_0^2$. *Тогда*

$$O(\mathbf{m}^1, m_0^1) \geq O(\mathbf{m}^2, m_0^2).$$

Доказательство. Достаточно проверить уменьшение (точнее, не увеличение) числа $O(\mathbf{m}, m_0)$ при уменьшении ровно одной компоненты на единицу. При уменьшении компоненты m_0 число $O(\mathbf{m}, m_0)$ заведомо не увеличится. При перестановке компонент вектора $\mathbf{m}$ число $O(\mathbf{m}, m_0)$ не меняется, поэтому достаточно уменьшить на единицу лишь первую компоненту. Суммы компонент вектора $\mathbf{m}$ и уменьшенного вектора при этом различаются на единицу и имеют разную четность. Поэтому нам достаточно доказать следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $m_0 + \cdots + m_n \equiv n \mod 2$ *и число* m_0 *нечетно. Тогда*

1) $O(\mathbf{m}, m_0) \leq O(\mathbf{q}, m_0)$, *где* $\mathbf{q} = \mathbf{m} + \mathbf{1}_1$;
2) $O(\mathbf{m}, m_0) \geq O(\mathbf{q}, m_0)$, *где* $\mathbf{q} = \mathbf{m} - \mathbf{1}_1$.

Доказательство. 1) Рассмотрим вместе с параллелепипедом $\Delta(\mathbf{m})$, заданным неравенствами $0 \leq y_i \leq m_i - 1$, параллелепипед $\Delta(\mathbf{q})$, заданный неравенствами

$$0 \leq y_1 \leq m_1, \quad 0 \leq y_2 \leq m_2 - 1, \ldots, \quad 0 \leq y_n \leq m_n - 1,$$

и объединение Γ целочисленных гиперплоскостей

$$y_1 + \cdots + y_n = \rho - j; \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

где $2k - 1 = m_0$. Число целых точек в $\Gamma \cap \Delta(\mathbf{m})$ равняется $O(\mathbf{m}, m_0)$, а в $\Gamma \cap \Delta(\mathbf{q})$ больше или равняется $O(\mathbf{m}, m_0)$, так как $\Delta(\mathbf{m}) \leq \Delta(\mathbf{q})$. Далее, число $O(\mathbf{q}, m_0)$ не меньше числа целых точек в $\Gamma \cap \Delta(\mathbf{q})$. Это вытекает из возрастания к середине числа точек $N(\mathbf{q}, k)$: число $O(\mathbf{q}, m_0)$ — это число целых точек на k последовательных целочисленных сечениях параллелепипеда $\Delta(\mathbf{q})$, начиная от среднего сечения и ниже, а $\Gamma \cap \Delta(\mathbf{q})$ содержит k последовательных целочисленных сечений этого параллелепипеда, лежащих строго ниже среднего сечения.

2) Рассмотрим тот же параллелепипед $\Delta(\mathbf{m})$ и те же k гиперплоскостей Γ, что и в п. 1), но параллелепипед $\Delta(\mathbf{q})$ определим неравенствами

$$0 \leq y_1 \leq m_1 - 2, \; 0 \leq y_2 \leq m_2 - 1, \ldots, \; 0 \leq y_n \leq m_n - 1.$$

Тогда $\Delta(\mathbf{m}) \cap \Gamma \supset \Delta(\mathbf{q}) \cap \Gamma$, поэтому первое из этих множеств содержит не меньше целых точек, чем второе. Осталось заметить, что число целых точек в множестве $\Delta(\mathbf{m}) \cap \Gamma$ равно $O(\mathbf{m}, m_0)$, а в множестве $\Delta(\mathbf{q}) \cap \Gamma$ равно $O(\mathbf{q}, m_0)$. •

Список литературы

[1] Арнольд В. И., *Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского–Олейник и смешанные структуры Ходжа*, Функц. анал. и его прил. **12** (1978), № 1, 1–14.

[2] Арнольд В. И., *Индексы особых точек 1-форм на многообразии с краем, сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями, и особые проекции гладких поверхностей*, Успехи мат. наук **34** (1979), № 2, 3–38.

[3] Близняков Н. М, *Об оценках вращения векторных полей на алгебраических многообразиях*, Функц. анал. и его прил. **13** (1979), № 2, 78.

[4] L. Kronecker, *Über einige Interpolationsformeln für ganze Funktionen mehrerer Variabeln*, Leopold Kronecker's Werke. Bd. 1, Verlag and Druck von B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1895, pp. 133–142.

[5] Петровский И. Г., Олейник О. А., *О топологии действительных алгебраических поверхностей*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **13** (1949), № 5, 389–402.

[6] Хованский А. Г., *Многогранники Ньютона и формула Эйлера–Якоби*, Успехи мат. наук **33** (1978), № 6, 237–238.

[7] Хованский А. Г., *Индекс полиномиального векторного поля*, Функц. анал. и его прил. **13** (1979), № 1, 49–58.

[8] Хованский А. Г., *Локальная кратность голоморфного отображения*, В кн.: В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, Особенности дифференцируемых отображений, 1, Наука, М., 1982, 66–89.

[9] Eisenbud D., Levine H., *An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ*, Ann. of Math. (2) **106** (1977), no. 1, 19–38.

[10] Химшиашвили Г. Н., *О локальной степени гладкого отображения*, Сообщ. АН ГрузССР **85** (1977), № 2, 309–312.

[11] Petrovskiĭ I. G., *On the topology of real plane algebraic curves*, Ann. of Math. (2) **39** (1938), 189–209.

Поступило 1 августа 1996 г.

117312 Москва
Проспект 60-летия Октября, 9,
Институт системного анализа
Российской Академии Наук
E-mail: askold@askold.mccmme.rssi.ru

University of Toronto
Department of Mathematics
Toronto Ontario M5S 3G3
Canada
E-mail: askold@math.toronto.edu