Résolubilité des équations par formules explicites (théorie de Liouville, théorie de Galois différentielle et obstructions topologiques)

A. G. Khovanskij

April 29, 2015

Cette appendice est dedié e à la résolubilité et à la non résolubilité des équations par formules explicites. Il s'agit d'un problème très vieux. L'idée de sa solution remonte à Abel. Aujourd'hui on connaît trois approches pour résoudre ce problème: la première appartient à Liouville; la seconde considè re le problème du point de vue de la théorie de Galois et est reliée aux noms de Picard, Vessiot, Kolchin et autres; la troisième approche, topologique, pour le cas des fonctions d'une variable, a été introduite dans ma thèse. Je suis infiniment reconnaissant envers mon directeur de thèse V.I. Arnol'd, qui a suscité mon intérêt dans ce sujet.

J'ai toujours cru que l'approche topologique ne pouvait pas s'appliquer complètement au cas de plusieurs variables. Seulement récemment j'ai découvert que cela n'est pas vrai et que dans le cas multi-dimensionnel on peut obtenir des résultats tout à fait analogues [25].

Cette appendice contient les sujets de mes exposés à la séance de la Société Mathématique de Moscou et aux élèves de l'École Normale Supérieure chez l'Université Indépendante de Moscou (octobre 1994).

Le paragraphe, concernant les fonctions de plusieurs variables, a été ajouté pour cette appendice pendant l'automne 2002.

Je remercie T.V. Belokrinitska pour l'aide pendant la préparation de cette appendice et F. Aicardi pour la traduction en français.

1 Résolubilité explicite des équations

Certaines équations différentielles ont des "solutions explicites". Si c'est le cas, alors la solution même donne une réponse au problème de la résolubilité. Mais en général toutes les tentatives de résoudre explicitement les équations se révèlent vaines. Il naît alors le désire de démontrer que pour ces équations ou pour des autres il n'existe pas de solutions explicites. Il faut maintenant bien définir de quoi il s'agit (sinon ce n'est pas clair ce que nous voulons effectivement démontrer). On peut le faire de la façon suivante: on distingue des classes de fonctions, et on dit qu'une équation se résout explicitement, si sa solution appartient à une de ces classes. À des classes différentes de fonctions correspondent des notions différents de résolubilité.

Pour définir une classe de fonction on donne d'abord une liste de *fonctions de base* et une liste d'*opérations permises*.

La classe de fonctions est alors définie comme l'ensemble de toutes les fonctions qui s'obtiennent des fonctions de base au moyen des opérations permises.

Exemple 1. La classe des fonctions *exprimables par radicaux*.

Liste de fonctions de base: les constantes et la fonction égale à la variable indépendante x.

Liste des opération permises: les opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division) et les opérations d'extraction de racines $\sqrt[n]{f}$, $n = 2, 3, \ldots$ d'une fonction f donnée.

La fonction $g(x) = \sqrt[3]{5x + 2\sqrt[2]{x}} + \sqrt[7]{x^3 + 3}$ est un exemple de fonction exprimable par radicaux.

Le problème célèbre de la résolubilité des équations par radicaux est relié à cette classe. Considérons l'équation algébrique

$$y^n + r_1(x)y^{n-1} + \cdots + r_n(x) = 0, \tag{1}$$

dans laquelle $r_i(x)$ sont des fonctions rationnelles d'une variable. La réponse complète au problème de la résolubilité de l'équation (1) par radicaux consiste dans la théorie de Galois (voir §8).

Remarquons que déjà dans la classe la plus simple de l'exemple 1 nous rencontrons des ennuis: les fonctions dans lesquelles nous avons à voir, sont multivaluées.

Précisons, par exemple, qu'est ce que c'est la somme de deux fonctions multivaluées $f(x)$ et $g(x)$. Prenons un point arbitraire a, un des germes f_a de la fonction analytique $f(x)$ au point a et un des germes g_a de la fonction analytique $g(x)$ au même point a. Nous dirons que la fonction $\varphi(x)$, définie par le germe $f_a + g_a$, est représentable comme somme des fonctions $f(x)$ et $g(x)$. Cette définition n'est pas univoque. Par exemple, on voit facilement qu'il y a exactement deux fonctions qui s'expriment par le somme $\sqrt{x} + \sqrt{x}$, notamment $f_1 = 2\sqrt{x}$ et $f_2 \equiv 0$. La fermeture d'une classe de fonctions multivaluées par rapport à la somme indique une classe qui contient, avec deux fonctions quelles que soient, toutes les fonctions représentables par leur somme.

On peut dire le même pour toutes les autres opérations sur les fonctions multivaluées que nous rencontrerons dans ce chapitre.

Exemple 2. *Fonctions élémentaires.* Les fonctions élémentaires de base sont les fonction qu'on apprend à l'école et qui se trouvent dans les claviers des calculatrices. Voici leur liste: la fonction constante, la fonction identique (qui associe à la valeur x la valeur x même), les racines $\sqrt[n]{x}$, l'exponentiel $\exp x$, le logarithme $\ln x$, les fonctions trigonométriques : $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$. Opérations permises: les opérations arithmétiques, les compositions.

Les fonction élémentaires s'écrivent par des formules, par exemple, la suivante:

$$f(x) = \arctan(\exp(\sin x) + \cos x).$$

Lorsqu'on commence à étudier l'analyse, on apprend que l'intégration des fonctions élémentaires est bien loin d'être une tâche facile. Liouville démontra en fait que les intégrales indéfinis des fonctions élémentaires ne sont pas en général des fonctions élémentaires.

Exemple 3. *Les fonctions représentables par quadratures.* Les fonctions de base dans cette classe sont les fonctions de base élémentaires. Les opérations permises sont les opérations arithmétiques, la composition et l'intégration. Une classe est dite *fermée par rapport à l'intégration*, si elle contient avec chaque fonction f aussi une fonction g telle que $g' = f$.

Par exemple, la fonction

$$\exp\left(\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right)$$

est représentable par quadratures. Mais, comme Liouville le démontra, cette fonction n'est pas élémentaire.

Les exemples 2 et 3 peuvent être modifiés. Nous dirons qu'une classe de fonctions est fermée par rapport aux solutions des équations algébriques, si avec chaque ensemble de fonctions $f_1, \ldots, f_n$ elle contient aussi la fonction y, satisfaisant l'équation

$$y^n + f_1 y^{n-1} + \cdots + f_n = 0.$$

Exemple 4. Si dans la définition de la classe des fonctions élémentaires on ajoute l'opération de résolution des équations algébriques, on obtient la classe des *fonctions élémentaires généralisées.*

Exemple 5. La classe des fonctions représentables par *quadratures généralisées* contient les fonctions obtenues de la classe des fonctions représentables par quadratures en ajoutant l'opération de résolution des équations algébriques.

2 La théorie de Liouville

Les premières démonstrations rigoureuses de la non résolubilité de certaines équations ni par quadratures ni par fonctions élémentaires ont été obtenues par Liouville à la moitié du XIX siècle. Ici nous rapportons brièvement ses résultats.

L'exposition de la méthode de Liouville et des travaux d'argument proche de Chebychev, Mordukai-Boltovski, Ostrovski et Ritt se trouve dans le livre [1].

Premièrement Liouville montra que les classes des fonctions des exemples 2–5 peuvent être construites très simplement. Saute aux yeux la quantité des fonctions élémentaires de base. En outre on trouve dans les définitions des difficultés du point de vue algébrique qui viennent de l'opération de composition. Liouville montra d'abord qu'on peut réduire considérablement les listes des fonctions de base, dans la moitié des cas en laissant dans elles seulement les constantes, et dans les cas restants seulement les constantes et la fonction identique $y = x$. Deuxièmement, il montra que dans les listes des opérations permises l'opération de composition est superflue. On peut donner les définitions de toutes les opérations nécessaires en utilisant seulement les opérations arithmétiques et la différenciation. Ce fait joue un rôle essentiel pour l'algébrisation du problème sur la numérotabilité des corps différentiels.

Formulons les définitions correspondantes dans l'algèbre différentielle.

Un corps de fonctions F s'appelle un *corps différentiel* s'il est fermé par rapport à la différenciation, c'est-à-dire, si $g \in F$ il en suit $g' \in F$. On peut aussi considérer les corps différentiels abstraits, c'est-à-dire les corps dans lesquels est définie une opération supplémentaire de différenciation, satisfaisant l'identité de Leibniz $(a{\cdot}b)' = a' \cdot b + a \cdot b'$.

Supposons qu'un corps différentiel F contient un autre corps différentiel plus petit F_0, $F_0 \subseteq F$. Un élément $y \in F$ est dit *algébrique* sur le corps F_0, si y satisfait une équation algébrique

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

où les coefficients a_i appartiennent au corps F_0. En particulier, l'élément y s'appelle *radical* sur le corps F_0, si $y^k \in F_0$. L'élément y est dit *intégrale* sur le corps F_0, si $y' \in F_0$. L'élément y est dit logarithme sur le corps F_0, si $y' = a'/a$, où $a \in F_0$. L'élément y est dit *intégrale exponentielle* sur le corps F_0, si $y' = ay$, $a \in F_0$. L'élément y est dit *exponentiel* sur le corps F_0, si $y' = a'y$. *L'extension du corps* F_0 au moyen de l'élément y, notée $F_0\{y\}$ est appelée le *corps différentiel minimal, contenant* F_0 *et* y. Le corps $F_0\{y\}$ consiste dans les fonctions rationnelles en $y, y', \ldots, y^{(k)}, \ldots$ avec coefficients en F_0.

- 1) L'élément y est dit *exprimable par radicaux sur le corps* F_0, s'il existe une suite $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_k$, telle que chaque extension $F_i \subseteq F_{i+1}$ est obtenue par l'adjonction d'un radical au corps F_i, et le corps $F_0\{y\}$ est contenu dans F_k.

  Par cette méthode on définit aussi les autres types de représentabilité de l'élément y sur le corps F_0. Par la méthode des "briques" on utilise dans ces définitions les autres types d'extension $F_i \subseteq F_{i+1}$.

- 2) L'élément y est dit *élémentaire sur le corps* F_0 lorsqu'on permet l'adjonction des logarithmes et de l'exponentiel.

- 3) L'élément y est dit *représentable par quadratures sur le corps* F_0 lorsqu'on permet l'adjonction des intégrales et des intégrales exponentielles.

- 4) L'élément y est dit *élémentaire généralisé sur le corps* F_0 lorsqu'on permet l'adjonction des éléments algébriques, des exponentiels et les logarithmes.

- 5) L'élément y est dit *représentable par quadratures généralisées sur le corps* F_0 lorsqu'on permet l'adjonction des éléments algébriques, des intégrales et des intégrales exponentielles.

THÉORÈME 1. (Liouville) *La fonction y est élémentaire (élémentaire généralisée), si et seulement si elle est élémentaire (élémentaire généralisée) sur les corps des fonctions rationnelles $\mathcal{R}$. La fonction y est représentable par quadratures (représentable par quadratures généralisées), si et seulement si elle est représentable par quadratures (représentable par quadratures généralisées) sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.*

Par exemple, il suit du théorème 1 que la fonction élémentaire de base $f(x) = \arctan x$ est représentable par quadratures sur le corps $F_0 = \mathbb{C}$. En effet, cela devient clair de l'inversion de l'égalité $f' \equiv \dfrac{1}{1+x^2}$, $x' \equiv 1$.

Pour démontrer, par exemple, la partie du théorème concernant les fonctions représentables par quadratures il suffit de vérifier, premièrement, qu'on a des représentations analogues pour toutes les fonctions élémentaires de base, et, deuxièmement, que la classe de fonctions représentables par quadratures sur le corps $\mathbb{C}$ est fermée par rapport à la composition.

Liouville a construit une jolie théorie sur la résolubilité des équations. Voici deux exemples de ses résultats.

THÉORÈME 2 (Liouville). *L'intégrale indéfinie $y(x)$ de la fonction algébrique $A(x)$ d'une variable complexe est exprimable par fonctions élémentaire généralisées* *si et seulement s'il est représentable sous la forme*

$$y(x) = \int^x A(t)\mathrm{d}t = A_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \ln A_i(x),$$

où les $A_i(x)$, pour $i = 0, 1 \ldots, k$, sont des fonctions algébriques.

A priori l'intégrale d'une fonction algébrique pourrait être donné par une formule très compliquée. Il pourrait avoir la forme

$$y = \exp(\exp(\exp(\exp(\exp(x))))).$$

Le théorème 2 montre que rien de pareille ne peut se produire. Ou l'intégrale d'une fonction algébrique s'écrit de façon simple, ou bien en général il n'est pas une fonction élémentaire généralisée.

Théorème 3 (Liouville). *L'équation différentielle linéaire*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2}$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions rationnelles, se résout par quadratures généralisées, si et seulement si sa solution s'écrit sous la forme

$$y = \exp(\int^x R(t)\mathrm{d}t),$$

où $R(x)$ est une fonction algébrique.

A priori l'équation 2 pourrait avoir des solutions qui s'expriment par des formules très compliquées. Le théorème 3 montre que rien de pareille ne se produit. Ou l'équation a des solutions suffisamment simples, ou bien en générale ne peut pas être résolue par quadratures généralisées.

Liouville trouva une série entière de résultats de ce type. L'idée commune est la suivante: les équations simples ont ou des solutions simples, ou en générale ne peuvent pas être résolues dans une classe donnée (par quadratures, par fonctions élémentaires etc.)

La stratégie des démonstrations dans la théorie de Liouville est la suivante: démontrer que si une équation simple a une solution qui s'écrit par une formule compliquée, alors cette formule peut quand même être simplifiée.

Liouville, sans doute, fut inspiré par les résultats de Lagrange, Abel et Galois sur la non résolubilité par radicaux des équations algébriques. Contrairement à la théorie de Galois, dans la théorie de Liouville la notion de groupe d'automorphismes ne figure pas. Toutefois Liouville utilise pour simplifier les formules des "automorphismes infiniment petits".

Revenons au théorème 2 sur l'intégrabilité des fonctions algébriques. De ce théorème il suit le corollaire suivant.

COROLLAIRE. *Si l'intégral d'une fonction algébrique A est une fonction élémentaire généralisée, alors la forme différentielle $A(x)dx$ a inévitablement des singularités sur la surface de Riemann de la fonction algébrique A.*

C'est bien connu que sur toute courbe algébriques de genus positif il existe de formes differentielles sans singularités (les ainsi-dits différentiels abéliens de premier type). Par conséquent les fonctions algébriques dont la surface de Riemann a genus positif, en général, ne sont pas intégrables par des fonctions élémentaires généralisées.

Ce fait était déjà connu à Abel, qui le découvrit en même temps qu'il démontra la non résolubilité par radicaux de l'équation générale de degré cinq. Observons à ce propos que la démonstration d'Abel de la non résolubilité par radicaux est fondée sur des raisonnements topologiques. Je ne connais pas si les propriétés topologiques des surfaces de Riemann sur le plan complexe des fonctions exprimables par quadratures généralisées diffèrent des surfaces de Riemann des fonctions élémentaires généralisées. En fait, je ne sais pas démontrer par des arguments topologiques que l'intégrale d'une fonction algébrique concrète n'est pas une fonction élémentaire: chacune de ces intégrales est par définition une fonction exprimable par quadratures généralisées. Toutefois, si une fonction algébrique dépend d'un paramètre, alors son intégrale peut dépendre du paramètre d'une façon arbitrairement compliquée. On arrive à démontrer que *l'intégrale d'une fonction algébrique comme fonction d'un paramètre peut ne pas être exprimable par quadratures généralisées* et, par conséquent, *peut ne pas être une fonction élémentaire généralisée du paramètre* (cf. l'exemple au §9).

3 La théorie de Picard-Vessiot

Considérons l'équation differentielle linéaire

$$y^{(n)} + r_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + r_n(x)y = 0, \tag{3}$$

dans laquelle les $r_i(x)$ sont des fonctions rationnelles d'argument complexe.

Au voisinage d'un point non singulier x_0 il existe n solutions linéairement indépendantes $y_1, \ldots, y_n$ de l'équation (3). Dans ce voisinage on peut considérer le corps des fonctions $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, obtenu par l'adjonction au corps de toutes les fonctions rationnelles $\mathcal{R}$, soit toutes les solutions y_i soit toutes leur dérivées $y_i^{(p)}$ jusqu'à l'ordre $(n-1)$. (Les dérivées d'ordre plus haut s'obtiennent de l'équation (3).

Le corps des fonctions $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$ est un corps différentiel, c'est-à-dire il est fermé par rapport à la différenciation, ainsi que le corps des fonctions rationnelles $\mathcal{R}$. On appelle *automorphisme du corps différentiel F* un automorphisme σ du corps F, qui préserve aussi l'opération de différenciation, notamment $\sigma(g') = [\sigma(g)]'$. Considérons un automorphisme σ du corps différentiel $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, qui laisse fixes tous les éléments du corps $\mathcal{R}$. L'ensemble de toutes les automorphismes de ce type forme un groupe, qui s'appelle *groupe de Galois* de l'équation (3). Chaque automorphisme σ du groupe de Galois envoie une solution de l'équation dans une solution de l'équation. Par conséquent lui correspond une transformation linéaire M_σ de l'espace des solutions V^n. L'automorphisme σ est complètement défini par la transformation M_σ, parce que le corps $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$ est engendré par les fonctions y_i. En général, pas toute transformation linéaire de l'espace V^n peut être continuée sur un automorphisme σ du groupe de Galois. La raison c'est que l'automorphisme σ doit préserver toutes les relations différentielles existant entre les solutions. Le groupe de Galois peut être considéré comme un groupe particulier de transformations linéaires des solutions. Il résulte que ce groupe est algébrique.

Ainsi, le groupe de Galois d'une équation est le groupe algébrique des transformations linéaires de l'espace des solutions qui préservent toutes les relations différentielles entre les composantes des solutions.

Picard commença à traduire la théorie de Galois dans le cas des équation différentielles linéaires. Comme dans la théorie originelle de Galois aussi ici il y a une correspondance biunivoque (la *correspondance de Galois*) entre les corps différentiels intermediaires et les sous-groupes algébriques du groupe de Galois.

Picard et Vessiot démontrèrent dans l'année 1910 que le seul responsable de la résolubilité d'une équation par quadratures et par quadratures généralisées c'est son groupe de Galois.

Théorème de Picard-Vessiot. *Pour qu'une équation différentielle soit résoluble par quadratures il faut et il suffit que son groupe de Galois soit résoluble. Pour qu'une équation différentielle soit résoluble par quadratures généralisées il faut et il suffit que la composante connexe de l'unité dans le groupe de Galois soit résoluble.*

Le lecteur peut trouver les résultats fondamentaux de la théorie de Galois différentielle dans le livre [2]. Dans [3] il trouvera une brève exposition de l'état actuel de cette théorie et une riche bibliographie.

Observons que du théorème de Picard-Vessiot il n'est pas difficile de déduire que, si l'équation (3) se résout par quadratures généralisées, alors elle a une solution de la forme $y_1 = \exp(\int^x A_1(t), \mathrm{d}t)$, où $A_1(x)$ est une fonction algébrique. Si l'équation a une solution explicite y_1, alors on peut diminuer son ordre, en prenant la nouvelle fonction inconnue $z = (y/y_1)'$. La fonction z satisfait une équation différentielle qui s'écrit de façon explicite d'ordre plus petit. Si l'équation initiale était résoluble, alors aussi l'équation pour la fonction z doit être résoluble. Elle doit donc, selon le théorème de Picard-Vessiot, avoir une solution du type $z_1 = \exp \int A_2(x)\mathrm{d}x$, où A_2 est une fonction algébrique etc. Nous voyons ainsi que si une équation linéaire se résout par quadratures généralisées, alors elle a des solutions données par des formules pas trop compliquées. Ici l'approche de Picard-Vessiot se comprend avec l'approche de Liouville. En outre, les critères de résolubilité d'une équation par quadratures généralisées peuvent être formulés sans mentionner le groupe de Galois. Précisément, l'équation (3) d'ordre n se résout par quadratures généralisées si et seulement si elle a une solution de la forme $y_1 = \exp \int^x A(x)\mathrm{d}x$ et l'équation d'ordre $(n-1)$ pour la fonction z se résout par quadratures généralisées.

Exactement dans cette forme ce théorème fut énoncé et démontré par Murdakai-Boltovskii. Murdakai-Boltovskii obtinrent ce résultat dans la même année 1910 par la méthode de Liouville, indépendamment des travaux de Picard et Vessiot. Le théorème de Mordukai-Boltovskii est une généralisation du théorème de Liouville (cf. théorème 3 du paragraphe précédent) comprenant les équations différentielle linéaires d'ordre quelconque.

4 Obstructions topologiques pour la représentation des fonctions par quadratures

Il existe une troisième approche au problème de la représentabilité d'une fonction par quadratures. (cf. [4]–[10]). Considérons les fonctions représentables par quadratures comme des fonctions analytiques multivaluées d'une variable complexe. Il se produit qu'il y a des restrictions topologiques sur le caractère de la disposition sur le plan complexe de la surface de Riemann d'une fonction représentable par quadratures. Si la fonction ne satisfait pas ces conditions, alors on ne peut pas l'exprimer par quadratures.

Cette approche en plus de l'évidence géométrique possède l'avantage suivant. Les interdictions topologiques sont reliées au caractère de la fonction multivaluée. Elles valent non seulement pour les fonctions représentables par quadratures, mais aussi pour une classe plus étendue de fonctions. Cette classe s'obtient en ajoutant aux fonctions représentables par quadratures toutes les fonctions méromorphes et en permettant que ces fonctions entrent dans toutes les formules. Pour ça les résultats topologiques sur la non représentabilité par quadratures sont plus forts que ceux de nature algébrique. La raison c'est que la composition de deux fonctions n'est pas une opération algébrique. Dans l'algèbre différentielle au lieu de la composition de deux fonctions, on considère l'équation différentielle que cette équation satisfait. Pourtant, par exemple, la fonction Γ d'Eulère ne satisfait aucune équation différentielle algébrique; par conséquent il est inutile de chercher une équation qui soit satisfaite, par exemple, par la fonction $\Gamma(\exp x)$. Les seuls résultats connus sur la non représentabilité des fonctions par quadratures et, disons, par les fonctions Γ

d'Eulère s'obtiennent seulement par notre méthode.

D'autre côté, par cette méthode on ne peut pas démontrer la non représentabilité par quadratures de n'importe quelle fonction méromorphe à une seule valeur.

En utilisant la théorie de Galois différentielle (et précisément sa partie algébrique-linéaire, ayant à voir avec les groupes matriciels algébriques et leur invariants différentiels), on peut démontrer que les seules raisons de la non résolubilité par quadratures des équations différentielle linéaires de Fuchs (cf. §11) sont de nature topologique. En autres mots, lorsqu'il n'y a pas d'obstructions topologiques à la résolubilité par quadratures d'une équation différentielle de Fuchs, elle est résoluble par quadratures.

Les obstructions topologiques à la représentation d'une fonction par quadratures et par quadratures généralisées sont les suivantes.

Premièrement, les fonctions qui s'expriment par quadratures généralisées, et, comme cas particulier, par quadratures, peuvent avoir un ensemble au plus dénombrable de points singuliers dans le plan complexe (cf. §5) (bien que déjà pour les fonctions les plus simples, représentables par quadratures, l'ensemble des points des points singuliers peut être partout dense!).

Deuxièmement le groupe de monodromie d'une fonction représentable par quadratures est nécessairement résoluble (cf. §7) (bien que déjà pour les fonctions les plus simples, représentables par quadratures, le groupe de monodromie peut contenir un continuum d'éléments!).

Il existe aussi de restrictions analogues sur la disposition de la surface de Riemann pour le fonctions représentables par quadratures généralisées. Toutefois ces restrictions ne se formulent pas facilement: en ce cas là le groupe de monodromie n'est pas considéré comme un groupe abstrait, mais comme le groupe des permutation des feuillets de la surface de Riemann. Ou bien, en autres mots, dans ce restrictions ne figure seulement le groupe de monodromie, mais aussi le *couple de monodromie* de la fonction, qui consiste en son groupe de monodromie et d'un son sous-groupe stationnaire d'un certain germe (cf. §9). Nous allons voir plus en détail cette approche géométrique au problème de la résolubilité.

5 $\mathcal{S}$-fonctions

Définissons une classe de fonctions dans laquelle on fera les considérations de ce paragraphe.

Définition. On appelle $\mathcal{S}$-*fonction* une fonction analytique multivaluée d'une variable complexe, si l'ensemble de ses points singuliers est au plus dénombrable.

Précisons cette définition. Deux germes réguliers f_a et g_b, définis aux points a

et b de la sphère de Riemann S^2, sont dit équivalents, si le germe g_b s'obtient du germe f_a par un prolongement régulier le long d'une certaine courbe. Chaque germe g_b, équivalent au germe f_a, est dit aussi germe régulier de la fonction analytique multivaluée f, engendré par le germe f_a.

Le point $b \in S^2$ est dit *singulier pour le germe* f_a, s'il existe une courbe $\gamma\,[0,1] \to S^2$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, telle que le germe f_a ne peut par être prolongé régulièrement le long de cette courbe, mais pour tout t, $0 \leq t < 1$, ce germe se prolonge le long de la courbe raccourcie $\gamma\,[0,t] \to S^2$. Il est facile de voir que les ensembles des points singuliers pour des germes équivalents coïncident.

Un germe régulier est dit $\mathcal{S}$-*germe*, si l'ensemble de ses points singuliers est au plus dénombrable. Une fonction analytique multivaluée est dite $\mathcal{S}$-fonction, si chacun de ses germes réguliers est un $\mathcal{S}$-germe.

On a démontré le théorème suivant.

Théorème de la fermeture de la classe des $\mathcal{S}$-fonctions ([6],[8],10]). *La classe $\mathcal{S}$ de toutes les $\mathcal{S}$-fonctions est fermée par rapport aux opérations suivantes:*

- *1) différenciation, c'est-à-dire si $f \in S$, alors $f' \in S$;*
- *2) intégration, c'est-à-dire si $f \in S$, alors $\int f(x)dx \in S$;*
- *3) composition, c'est-à-dire si $g,\ f \in S$, alors $g \circ f \in S$;*
- *4) opération méromorphe, c'est-à-dire si $f_i \in S$, $i = 1, \ldots, n$, $F(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction méromorphe en n variables et $f = F(f_1, \ldots, f_n)$, alors $f \in S$;*[1]
- *5) résolution d'équations algébriques, c'est-à-dire si $f_i \in S$, $i = 1, \ldots, n$, et $f^n + f_1 f^{n-1} + \cdots + f_n = 0$, alors $f \in S$;*
- *6) résolution d'équations différentielles linéaires, c'est-à-dire si $f_i \in S$, $i = 1, \ldots, n$, et $f^{(n)} + f_1 f^{(n-1)} + \cdots + f_n = 0$, alors $f \in S$.*

Corollaire. *Si la fonction multivaluée f peut s'obtenir par des $\mathcal{S}$-fonctions à une seule valeur par les opérations d'intégration, différenciation, opérations méromorphes, compositions, résolutions d'équations algébriques et d'équations différentielles linéaires, alors la fonction f a au plus un ensemble dénombrable de points singuliers. En particulier, une fonction ayant un ensemble non dénombrable de points singuliers, ne peut pas être représentée par quadratures généralisées.*

[1]Plus précisément, *l'opération méromorphe*, définie par la fonction méromorphe $F(x_1, \ldots, x_n)$, fait correspondre aux fonctions $f_1, \ldots, f_n$ une nouvelle fonction $F(f_1, \ldots, f_n)$. Les opérations arithmétiques et l'exponentiel sont des exemples d'opérations méromorphes, correspondant aux fonctions $F_1(x, y) = x + y$, $F_2(x, y) = x \cdot y$, $F_3(x, y) = x/y$ et $F_4(x) = \exp x$.

6 Groupe de monodromie

Le *groupe de monodromie* d'une $\mathcal{S}$-fonction f avec un ensemble A de points singuliers c'est le groupe de toutes le permutations des feuillets de la surface de Riemann de f visités lorsque on fait des tours autour des points de l'ensemble A.

Plus précisément, soit F_a l'ensemble de tous les germes de la $\mathcal{S}$-fonction f au point a, n'appartenant pas à l'ensemble A des points singuliers. Prenons une courbe fermée γ dans $S^2 \setminus A$ commençant au point a. Le prolongement de chaque germe de l'ensemble F_a le long de la courbe γ conduit à un germe de l'ensemble F_a.

Ainsi, à chaque courbe γ correspond une application de l'ensemble F_a dans lui même, et à courbes homotopes dans $S^2 \setminus A$ correspond la même application. À la composition des courbes correspond la composition des applications. On a ainsi défini un homomorphisme τ du groupe fondamental de l'ensemble $S^2 \setminus A$ dans le groupe $S(F_a)$ des applications bijectives de l'ensemble F_a dans soi même. On appelle *groupe de monodromie* de la $\mathcal{S}$-fonction f l'image du groupe fondamental $\pi_1(S^2 \setminus A, a)$ dans le groupe $S(F_a)$ par l'homomorphisme τ.

Montrons les résultats, dont il faut tenir compte dans l'étude des fonctions représentables par quadratures comme fonctions d'une variable complexe.

Exemple. Considérons la fonction $w(z) = \ln(1 - z^{\alpha})$, oú $\alpha > 0$ est un nombre irrationnel. La fonction w est une fonction élémentaire, donnée par une formule très simple. Toutefois sa surface de Riemann est très compliquée. L'ensemble A des points singuliers consiste dans les points $0, \infty$ et des points $a_k = e^{\frac{1}{\alpha}2k\pi i}$, où k est un nombre entier relatif quelconque. Puisque α est irrationnel, les points a_k sont densement distribués sur le cercle unitaire. Il n'est pas difficile de démontrer que le groupe fondamental $\pi_1(S^2 \setminus A)$ et le groupe de monodromie de la fonction w sont continus. On peut aussi démontrer que l'image par l'homomorphisme τ du groupe fondamental $\pi_1(S^2 \setminus \{A \cup b\})$ du complément de $A \cup b$, où $b \neq a_k$ est un point quelconque sur le cercle unitaire, est un sous-groupe propre du groupe de monodromie de la fonction w. (Le fait que l'élimination d'un seul point peut faire changer le groupe de monodromie rend substantiellement compliquées toutes les démonstrations).

7 Obstructions à la représentabilité des fonctions par quadratures

On a démontré le théorème suivant.

Théorème ([6],[8],[10]). *La classe de toutes les $\mathcal{S}$-fonctions, ayant le groupe de monodromie résoluble, est fermée par rapport aux compositions, aux opérations* *méromorphes et aux opérations d'intégration et différenciation.*

Nous obtenons ainsi le corollaire suivant.

Résultat sur les quadratures. *Le groupe de monodromie de la fonction f, représentable par quadratures, est résoluble. En outre, c'est résoluble aussi le groupe de monodromie de chaque fonction f, qui s'obtient à partir de $\mathcal{S}$-fonctions à une seule valeur au moyen des compositions, des opérations méromorphes, des opérations d'intégration et de différenciation.*

Arrêtons nous sur l'application de ce résultat à l'algèbre.

8 Résolubilité des équations algébriques

Considérons l'équation algébrique

$$y^n + r_1 y^{n-1} + \cdots + r_n = 0, \tag{4}$$

dans laquelle les r_i sont des fonctions rationnelles de la variable complexe x.

Au voisinage d'un point non singulier x_0 il y toutes le solutions $y_1, \ldots, y_n$ de l'équation (4). Dans ce voisinage on peut considérer le corps de toutes les fonctions $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, obtenu par l'adjonction au corps $\mathcal{R}$ de toutes les solutions y_i.

Considérons l'automorphisme σ du corps $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$ qui laisse à sa place chaque élément du corps $\mathcal{R}$. La totalité de ces automorphismes forme un groupe, qui s'appelle *groupe de Galois de l'équation* (4). Chaque automorphisme σ du groupe de Galois transforme une solution de l'équation dans une solution de l'équation, et donc lui correspond une permutation S_σ des solutions. L'automorphisme σ est complètement défini par la permutation S_σ, parce que le corps $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$ est engendré par les fonctions y_i. En général, pas toute permutation des solutions peut être prolongée sur un automorphisme σ du groupe de Galois: la raison c'est que les automorphismes σ doivent conserver toutes les relations existant entre les solutions.

Ainsi le groupe de Galois d'une équation est le groupe des permutations des solutions qui préserve toutes les relations entre les solutions.

Chaque permutation S_γ de l'ensemble des solutions peut être prolongée du groupe de monodromie à un automorphisme de tout le corps $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$. En effet, avec les fonctions $y_1, \ldots, y_n$, le long de la courbe γ chaque élément du corps $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$ se prolongera méromorphiquement. Ce prolongement donne l'automorphisme cherché, parce que pendant le prolongement les opérations arithmétiques se conservent et chaque fonction rationnelle revient à sa valeur précédente à cause de son univocité.

Ainsi, le groupe de monodromie de l'équation est contenu dans le groupe de Galois: en réalité, le groupe de Galois coïncide avec le groupe de monodromie. En effet, les fonctions du corps $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$ qui ne bougent pas sous l'action du groupe de monodromie sont les fonctions à une seule valeur. Ces fonctions sont algébriques, mais chaque fonction algébrique à une seule valeur c'est une fonction rationnelle. Par conséquent le groupe de monodromie et le groupe de Galois ont le même corps d'invariants, et donc, par la théorie de Galois, coïncident.

Selon la théorie de Galois, l'équation (4) se résout par radicaux sur le corps des fonctions rationnelles si et seulement si son groupe de Galois est résoluble sur ce corps. En autres mots, la théorie de Galois démontre les choses suivantes:

1) *Une fonction algébrique y, dont le groupe de monodromie est résoluble, est représentable par radicaux.*

2) *Une fonction algébrique y, dont le groupe de monodromie n'est pas résoluble, n'est pas représentable par radicaux.*

Notre théorème veut rendre plus fort le résultat (2).

Une fonction algébrique y, dont le groupe de monodromie n'est pas résoluble, n'est pas représentable par des $\mathcal{S}$-fonctions à une seule valeur au moyen des opérations méromorphes, des compositions, des intégrations et des différenciations.

Si une équation algébrique ne se résout pas par radicaux, alors elle ne peut pas se résoudre en utilisant les logarithmes, les exponentiels et les autres fonctions méromorphes sur le plan complexe. On peut trouver une variante encore plus forte de cette assertion au §15.

9 Le couple de monodromie

Le groupe de monodromie d'une fonction n'est pas seulement un groupe abstrait mais c'est le groupe des permutations transitives des feuillets de sa surface de Riemann. Algébriquement cet objet est donné par un couple de groupes: le groupe des permutations et un sous-groupe de celui-là, étant le groupe stationnaire d'un certain élément.

On appelle le *couple de monodromie d'une $\mathcal{S}$-fonction* un couple de groupes, consistant dans le groupe de monodromie de cette fonction e le sous-groupe stationnaire d'un certain feuillet de la surface de Riemann. Le couple de monodromie est défini correctement, c'est-à-dire le couple de groupes, à isomorphismes près, ne dépend pas du choix du feuillet.

DÉFINITION. Le couple de groupes $[\Gamma, \Gamma_0]$ est dit *couple presque résoluble de groupes* s'il existe une suite de sous-groupes

$$\Gamma = \Gamma_1 \supseteq \cdots \supseteq \Gamma_m, \quad \Gamma_m \subset \Gamma_0,$$

telle que pour chaque $i, 1 \leq i \leq m-1$ le groupe Γ_{i+1} est un diviseur normal du groupe Γ_i et le groupe quotient Γ_i/Γ_{i+1} est ou bien commutatif, ou bien fini.

Un groupe quelconque Γ peut être considéré comme le couple de groupes $[\Gamma, e]$, où e est le sous-groupe unitaire (le groupe contenant le seul élément unité). Nous dirons que le groupe Γ est *presque résoluble*, si le couple $[\Gamma, e]$ est presque résoluble.

THÉORÈME ([6],[8],[10]). *La classe de toutes les $\mathcal{S}$-fonctions, ayant le couple de monodromie presque résoluble, est fermée par rapport aux compositions, aux opérations méromorphes, aux opérations d'intégration et de différenciation et aux résolutions d'équations algébriques.*

Nous obtenons ainsi le corollaire suivant.

RÉSULTAT SUR LES QUADRATURES GÉNÉRALISÉES. *Le couple de monodromie de la fonction f, représentable par quadratures généralisées, est presque résoluble. En outre, c'est presque résoluble aussi le couple de monodromie de chaque fonction f, qui s'obtient à partir de $\mathcal{S}$-fonctions à une seule valeur au moyen des compositions, des opérations méromorphes, des opérations d'intégration et de différenciation et des solutions des équations algébriques.*

Considérons maintenant des exemples de fonctions non représentables par quadratures généralisées. Supposons que la surface de Riemann de la fonction f soit un revêtement universel de $S^2 \setminus A$, où S^2 est la sphère de Riemann et A c'est un ensemble fini, contenant au moins trois points. Alors *la fonction f ne peut pas s'exprimer par $\mathcal{S}$-fonctions au moyen de quadratures généralisées, compositions et opérations méromorphes.* En effet, le couple de monodromie de cette fonction consiste en un groupe libre non commutatif, et son sous-groupe unitaire. On voit facilement qu'un couple de ce type n'est pas presque résoluble.

EXEMPLE. Considérons la fonction z, qui réalise la transformation conforme du demi-plan supérieure dans le triangle avec angles nuls, borné par trois arcs de cercle. La fonction z est la fonction inverse de la fonction modulaire de Picard. La surface de Riemann de la fonction z est un revêtement universel de la sphère sans trois points; par conséquent la fonction z ne s'exprime pas par des $\mathcal{S}$-fonctions à une seule valeur au moyen de quadratures généralisées, compositions et opérations méromorphes.

Observons que la fonction z est strictement reliée aux intégrales elliptiques

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{et } K'(k) = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Chacune des fonctions $K(k)$, $K'(k)$ et $z(w)$ peut s'obtenir de chacune des autres deux par quadratures. Par conséquent aucune des intégrales $K(k)$ et $K'(k)$ ne s'exprime par des $\mathcal{S}$-fonctions à une seule valeur au moyen de quadratures généralisées, compositions et opérations méromorphes.

Dans le paragraphe suivant nous généraliserons l'exemple ci-dessus et numéroterons tous les polygones, bornés par des arcs de cercle, sur lesquels on peut envoyer le demi-plan supérieur par des fonctions qui s'expriment par quadratures généralisées.

10 Application du demi-plan sur un polygone, borné par des arcs de cercle

10.1 Applications du principe de symétrie.

Considérons dans le plan complexe un polygone G, borné par des arcs de cercle. Selon le théorème de Riemann il existe une fonction f_G envoyant le demi-plan supérieure dans le polygone G. Cette application fut étudiée par Riemann, Schwarz, Christoffel, Klein et des autres (cf, par exemple, [11]). Rappelons quelques résultats classiques qui nous serviront.

Notons par $B = \{b_j\}$ la préimage de l'ensemble des sommets du polygone G par l'application f_G, par $H(G)$ le groupe des transformations conformes de la sphère engendré par les inversions par rapport aux côtés du polygone et par $L(G)$ le sous-groupe d'indice 2 du groupe $H(G)$ des applications homographiques (quotients de deux fonctions linéaires). Du principe de symétrie de Riemann-Schwarz on obtient le résultats suivants.

Proposition.

- *1) La fonction f_G se prolonge méromorfiquement le long de toute courbe ne passant pas par l'ensemble B.*

- *2) Tous les germes de la fonctions à plusieurs valeurs f_G dans un point non singulier $a \notin B$ s'obtiennent en appliquant à un germe fixé f_a le groupe homographique des transformations $L(G)$.*

- *3) Le groupe de monodromie de la fonction f_G est isomorphe au groupe $L(G)$.*

- *4) Aux points b_j la fonction f_G a des singularités du type suivant. Si dans le sommet a_j du polygone G, correspondant au point b_j, l'angle est égal à $\alpha_j \neq 0$, alors la fonction f_G par une application homographique se met sous la forme $f_G(z) = (z - b_j)^{\beta_j}\varphi(z)$, où $\beta_j = \alpha_j/2\pi$, et la fonction φ est holomorphe au voisinage du point b_j. Si au contraire l'angle $\alpha_j = 0$, alors la fonction f_G par une application homographique se met sous la forme $f_G(z) = \ln(z) + \varphi(z)$, où la fonction φ est holomorphe au voisinage de b_j.*

De nos résultats il suit que si la fonction f_G est représentable par quadratures généralisées, alors le groupe $L(G)$) et avec lui le groupe $H(G)$ sont presque résolubles.

10.2 Groupes presque résolubles d'applications homographiques et conformes

Soit π l'epimorphisme du groupe $SL(2)$ des matrices d'ordre 2 avec déterminant 1 dans le groupe des applications homographiques L,

$$\pi \ : \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \frac{az+b}{cz+d}.$$

Puisque $\ker \pi = \mathbb{Z}_2$, le groupe $\tilde{L} \subseteq L$ et le groupe $\pi^{-1}(\tilde{L}) = \Gamma \subseteq SL(2)$ sont tous les deux presque résolubles. Le groupe Γ c'est un groupe de matrices: par conséquent le groupes Γ *est presque résoluble si et seulement s'il a un sous-groupe normal* Γ_0 *d'indice fini qui se met en forme triangulaire.* (Cette variante du théorème de Lie est vrai aussi en dimension supérieure et joue un rôle important dans la théorie de Galois différentielle). Le groupe Γ_0 consistant de matrices d'ordre 2, le groupe Γ_0 se met en forme triangulaire dans l'un des trois cas suivants:

- 1) Le groupe Γ_0 a un seul sous-espace propre unidimensionnel;
- 2) Le groupe Γ_0 a deux sous-espaces propres unidimensionnels;
- 3) Le groupe Γ_0 a un sous-espace propre de dimension 2.

Considérons maintenant le groupe homographique des transformations $\tilde{L} = \pi(\Gamma)$. Le groupes $\tilde{L}$ d'applications homographiques est presque résoluble si et seulement si L_0 est son sous-groupe normal d'indice fini, $L_0 = \pi(\Gamma_0)$, et l'ensemble des points invariants consiste en un seul point, en deux points ou en toute la sphère de Riemann.

Le groupe des transformations conformes $\tilde{H}$ contient le groupe $\tilde{L}$ d'indice 2 (ou d'indice 1), consistant dans les applications homographiques. Pour un groupe presque résoluble $\tilde{H}$ d'applications conformes est donc vraie une proposition analogue.

LEMME. *Un groupe d'applications conformes de la sphère est presque résoluble si et seulement s'il satisfait au moins une de ces conditions:*

- 1) *le groupe a un seul point invariant;*
- *2) le groupe a un ensemble invariant consistant en deux points;*
- *3) le groupe est fini.*

Ce lemme suit des propositions précédentes, parce que l'ensemble des points invariants pour un diviseur normal est invariant par rapport à l'action du groupe.

Il est bien connu qu'*un groupe fini* $\tilde{L}$ *d'applications homographiques de la sphère est envoyé par un changement homographique des coordonnées dans un groupe de rotations.*

Il n'est pas difficile de démontrer que si le produit de deux inversions par rapport à deux cercles différents correspond, par la projection stéréographique, à une rotation de la sphère, alors ces cercles correspondent à des cercles maximums. Par conséquent *chaque groupe fini* $\tilde{H}$ *de transformations conformes engendré par les inversions par rapport à des cercles, est envoyé par un changement homographique de coordonnées dans un groupe de mouvements de la sphère, engendré par les réflexions.*

Tous les groupes finis des mouvements de la sphère engendrés par les réflexions sont bien connus. Il sont exactement les groupes des symétries des objets suivantes:

- 1) La pyramide régulière ayant comme base le n-gone régulier;
- 2) Le n-dièdre, c'est-à-dire le solide fait de deux pyramides régulières collées par leur bases.
- 3) Le tétraèdre;
- 4) Le cube ou l'octaèdre;
- 5) Le dodécaèdre ou l'icosaèdre.

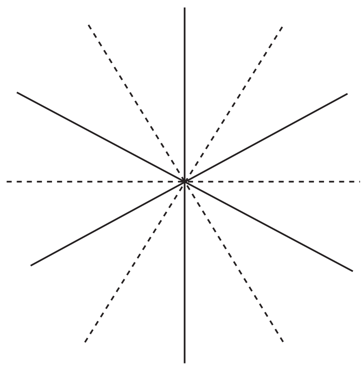

Figure 1: Pyramide

Tous ces groupes de symétries, exclu le groupe du dodécaèdre-icosaèdre, sont résolubles. La sphère, dont le centre coïncide avec le centre de gravité du solide, est découpée par les plans de symétrie du solide le long d'un réseau de cercles maximums. Les réseaux correspondants aux solides mentionnées, seront appelés réseaux finis de cercles maximums. Les projections stéréographiques des réseaux finis sont montrés dans les figures 1-5.

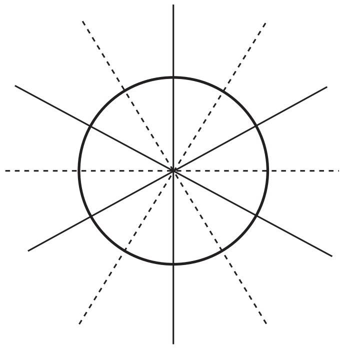

Figure 2: 6-dièdre

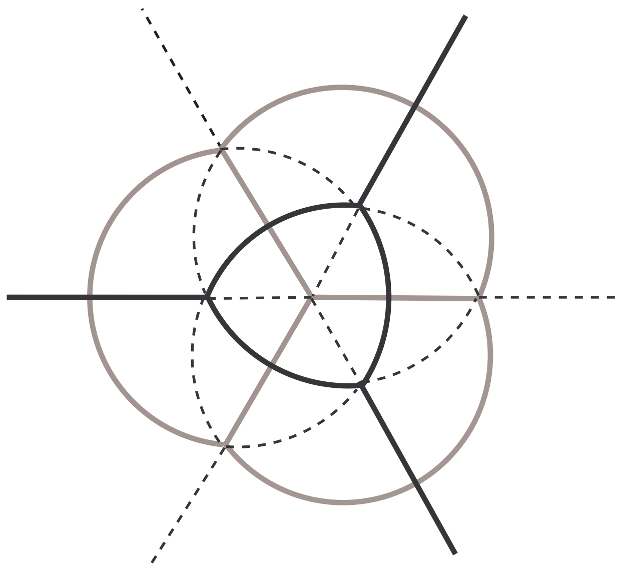

Figure 3: Tétraèdre–Tétraèdre

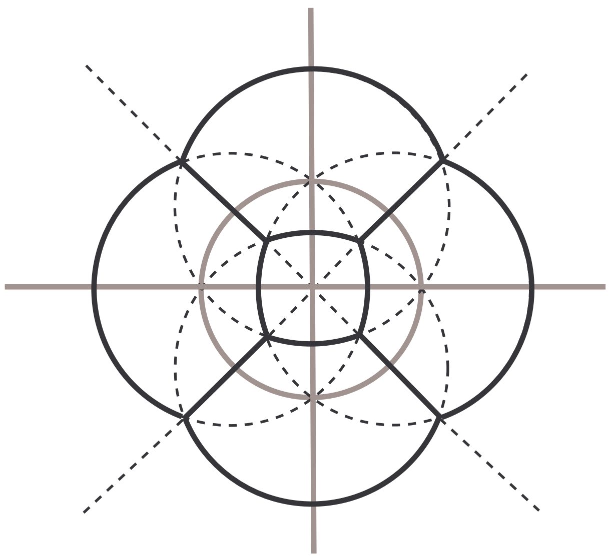

Figure 4: Cube–Octaèdre

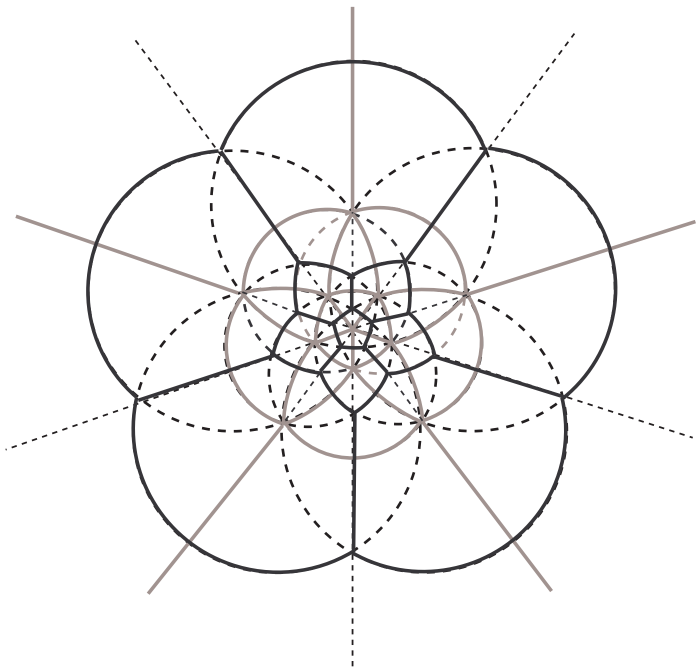

Figure 5: Dodécaèdre–Icosaèdre

10.3 Les cas intégrables

Revenons au problème de la représentabilité de la fonction f_G par quadratures généralisées.

Considérons maintenant les cas possibles et montrons que la condition trouvée est non seulement nécessaire mais aussi suffisante pour la représentabilité de la fonction f_G par quadratures généralisées.

Premier cas d'intégrabilité. Le groupe $H(G)$ a un point invariant. Cela signifie que les prolongements des côtés du polygone G s'intersectent dans un points. Envoyant ce point à l'infini par une application homographique, nous obtenons le polygone $\overline{G}$, borné par des segments de droites (cf. fig. 6).

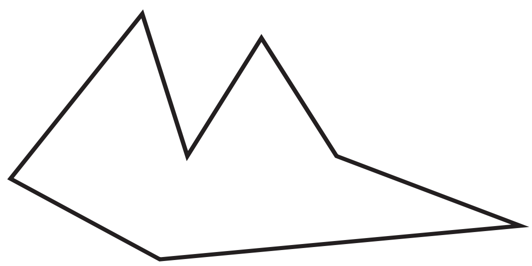

Figure 6: Le premier cas d'intégrabilité.

Toutes des applications $L(\overline{G})$ sont de la forme $z \to az + b$. Tous les germes de la fonction $\overline{f} = f_{\overline{G}}$ dans un point non singulier c s'obtiennent en appliquant à un germe fixé $\overline{f}_c$ le groupe $L(\overline{G})$, $\overline{f}_c \to a\overline{f}_c + b$. Le germe $R_c = \overline{f}''_c / \overline{f}'_c$ est invariant par rapport à l'action du groupe $L(\overline{G})$. Cela signifie que le germe R_c c'est le germe d'une fonction à une seule valeur. Les points singuliers b_j de la fonction R_c peuvent être seulement des pôles (cf. proposition au §10.1). Alors la fonction R_c est rationnelle. L'équation $\overline{f}''/\overline{f}' = R$ est intégrable par quadratures. Ce cas d'intégrabilité est bien connu. La fonction $\overline{f}$ dans ce cas s'appelle *intégrale de Christoffel-Schwarz*.

Deuxième cas d'intégrabilité. Le groupe $H(G)$ a un ensemble invariant consistant en deux points. Cela signifie qu'il y a deux points tels que pour chaque côté du polygone G ces points s'obtiennent où par une inversion par rapport à ce côté ou bien ils appartiennent à son prolongement. Envoyons ces points un à l'origine et l'autre à l'infini par une application homographique. Nous obtenons le polygone $\overline{G}$, borné par des arcs de cercles avec centres au point 0 et des morceaux de rayons sortant du point 0 (cf. fig. 7).

Toutes les transformations du groupe $L(\overline{G})$ sont de la forme $z \to az$, $z \to \frac{b}{z}$. Tous les germes de la fonction $\overline{f} = f_{\overline{G}}$ dans un point non singulier c s'obtiennent en

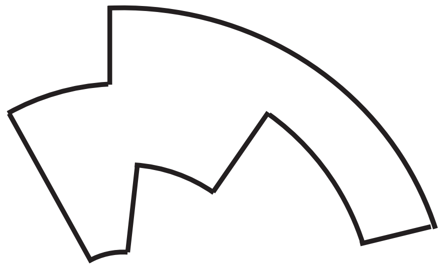

Figure 7: Le deuxième cas d'intégrabilité.

appliquant à un germe fixé $\overline{f}_c$ les transformations du groupe $L(\overline{G})$

$$\overline{f}_c \to a\overline{f}_c,\ \overline{f}_c \to b/\overline{f}_c.$$

Le germe $R_c = (\overline{f}'_c/\overline{f}_c)^2$ est invariant par rapport à l'action du groupe $L(\overline{G})$ et c'est le germe de la fonction à une seule valeur R. Les singularités de la fonction R peuvent être seulement des pôles (cf. proposition au §10.1). Alors la fonction R_c est rationnelle. L'équation $R = (\overline{f}''/\overline{f}')^2$ est intégrable par quadratures.

Troisième cas d'intégrabilité. Le groupe $H(G)$ est fini. Cela signifie que le polygone G est envoyé par une application homographique dans le polygone $\overline{G}$, dont les côtés se trouvent sur un des réseaux finis de cercles maximums. (voir figures 1-5). Le groupe $L(G)$ est fini, et, par conséquent, la fonction f_G a un nombre fini de valeurs. Puisque toutes les singularités de la fonction f_G sont de type 'saut' ((cf. proposition au §10.1) la fonction f_G est une fonction algébrique.

Arrêtons nous sur le cas du groupe $H(G)$ fini et résoluble. Ce cas se produit si et seulement si le polygone G est envoyé par une application homographique dans un polygone $\overline{G}$, dont les côtés sont situés sur un réseau différent du réseau du dodécaèdre-icosaèdre. Dans ce cas le groupe $L(G)$ est résoluble, et la fonction f_G s'exprime par des fonctions rationnelles au moyen d'opérations arithmétiques et des radicaux (cf. §8).

De nos résultats suit le suivant:

Théorème sur les polygones bornés par des arcs de cercles ([6],[8],[10]). *Pour un polygone arbitraire G, n'appartenant pas aux trois cas d'intégrabilité ci-dessus, la fonction f_G non seulement n'est pas représentable par quadratures généralisées, mais ne peut pas s'exprimer par $\mathcal{S}$-fonctions à une seule valeur au moyen de quadratures généralisées, compositions et opérations méromorphes.*

11 Obstructions topologiques à la résolubilité des équations différentielles

11.1 Le groupe de monodromie d'une équation differentielle linéaire et sa relation avec le groupe de Galois

Considérons l'équation différentielle linéaire

$$y^{(n)} + r_1 y^{(n-1)} + \cdots + r_n y = 0, \tag{5}$$

où les r_i sont des fonctions rationnelles de la variable complexe x. Les pôles des fonctions r_i et le point ∞ sont appelés points singuliers de l'équation (5).

Au voisinage du point non singulier x_0 les solutions de l'équations forment un espace V^n de dimension n. Prenons maintenant une courbe arbitraire $\gamma(t)$ sur le plan complexe, sortant du point x_0 et se terminant au point x_1 sans passer par les points singuliers a_i. Les solutions de l'équation se prolongeront analytiquement le long de la courbe, en restant pourtant des solutions de l'équation. Par conséquent à chaque courbe γ correspond une application linéaire M_γ de l'espace $V^n_{x_0}$ des solutions au point x_0 dans l'espace $V^n_{x_1}$ des solutions au point x_1.

Si l'on perturbe la courbe γ, en évitant les points singuliers et en laissant ses extrêmes fixés, l'application M_γ ne changera pas. À une courbe fermée correspondra une transformation linéaire de l'espace V^n dans lui même. La totalité de ces transformations linéaires de l'espace V^n forme un groupe, qui s'appelle *groupe de monodromie de l'équation* (5). Ainsi, le groupe de monodromie d'une équation c'est le groupe des transformations linéaires des solutions, qui correspondent aux tours autour des points singuliers. Le groupe de monodromie d'une équation caractérise la multivocité de ses solutions.

Au voisinage d'un point non singulier x_0 il y a n solutions linéairement indépendantes $y_1, \ldots, y_n$ de l'équation (5). Dans ce voisinage on peut considérer le corps des fonctions $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, obtenu par l'adjonction au corps des fonctions rationnelles $\mathcal{R}$ toutes les solutions y_i et toutes leurs dérivées.

Chaque transformation M_γ du groupe de monodromie de l'espace des solutions peut être prolongée à un automorphisme du tout le corps $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$. En effet, avec les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ le long de la courbe γ se prolongera méromorphiquement chaque élément du corps $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Ce prolongement donne l'automorphisme cherché, parce que pendant le prolongement les opérations arithmétiques et la différenciation se conservent, et les fonctions rationnelles reviennent à leur valeurs précédentes à cause de leur univocité.

Ainsi, *le groupe de monodromie d'une équation est contenu dans son groupe de Galois.*

Le corps des invariants du groupe de monodromie c'est un sous-corps de $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, consistant dans les fonctions à un seule valeur. À la différence des équations algébriques pour les équations différentielles le corps des invariants par rapport à l'action du groupe de monodromie peut être plus grand du corps des fonctions rationnelles.

Par exemple, pour l'équation différentielle (5), dans laquelle tous les coefficients $r_i(x)$ sont des polynômes, toutes les solutions ont une seule valeur. Mais, naturellement, les solutions de telles équations sont loin d'être toujours polynomiales. La raison c'est qu'ici les solutions des équations différentielles peuvent croître de façon exponentielle en approchant des points singuliers. On connaît l'extension de la classe des équations différentielle linéaires, pour lesquelles il n'y a pas de ces complications, c'est-à-dire pour lesquelles les solutions en approchant des points singuliers croissent non plus vite qu'une puissance. Les équations différentielles qui possèdent cette propriété s'appellent équations de Fuchs.

Pour les équations différentielles de Fuchs on a le théorème de Frobénius.

THÉORÈME 1. *Le sous-corps du corps différentiel $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, consistant dans les fonctions à une seule valeur pour les équations différentielles de Fuchs coïncide avec le corps des fonctions rationnelles.*

Selon la théorie de Galois différentielle du théorème de Frobénius il suit que la fermeture algébrique du groupe de monodromie M (c'est-à-dire le groupe algébrique plus petit contenant M) coïncide avec son groupe de Galois.

La théorie différentielle de Galois donne donc le critère suivant de résolubilité des équations différentielles de Fuchs.

THÉORÈME 2. *Une équation différentielle de Fuchs se résout par quadratures et par quadratures généralisées si son groupe de monodromie est, respectivement, résoluble ou presque résoluble.*

La théorie différentielle de Galois démontre au même temps deux résultats:

- *1) Si le groupe de monodromie d'une équation différentielle de Fuchs est résoluble (presque résoluble), alors cette équation se résout par quadratures (par quadratures généralisées).*

- *2) Si le groupe de monodromie d'une équation différentielle de Fuchs n'est pas résoluble (pas presque résoluble), alors cette équation ne se résout pas par quadratures (par quadratures généralisées).*

Notre théorème entend rendre plus fort le résultat 2. En effet, il est facile de voir que pour presque chaque solution de l'équation différentielle (5) son couple de monodromie est $[M, e]$, où M est le groupe de monodromie de l'équation, et e est son sous-groupe trivial. Nous avons donc le suivant:

Théorème 3 ([6],[8]). *Si le groupe de monodromie de l'équation différentielle (5) n'est pas résoluble (pas presque résoluble), alors presque toute solution de cette équation ne peut pas s'exprimer par des $\mathcal{S}$-fonctions à une seule valeur au moyen des compositions, des opérations méromorphes, de l'intégration et de la différenciation et des solutions d'équations algébriques.*

Est-ce que le groupe de monodromie d'une équation différentielle linéaire donnée est résoluble (presque résoluble)? Cette question se révèle très difficile. Toutefois, il existe un exemple intéressant, dans lequel la réponse à cette question est très simple.

11.2 Systèmes des équations différentielles de Fuchs avec de petits coefficients

Considérons un système d'équations différentielles linéaires de Fuchs, c'est-à-dire un système du type

$$y' = Ax \tag{6}$$

où $y = y_1, \ldots, y_n$ est la fonction vectorielle inconnue et A est une matrice $n \times n$, consistant en des fonctions rationnelles de la variable complexe x, ayant la forme suivante:

$$A(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{x - a_i},$$

où les A_i sont des matrices constantes.

Si les matrices A_i se mettent au même temps sous la forme triangulaire, alors le système (6), comme tout système triangulaire, se résout par quadratures. Il y a sans doute des systèmes non triangulaires résolubles. Toutefois, si les matrices A_i sont suffisamment petites, alors il n'y a pa de ces systèmes. Plus précisément on a le suivant:

Théorème 4([9]). *Un système (6) non triangulaire avec des matrices A_i suffisamment petites, $\|A_i\| < \varepsilon(a_1, \ldots, a_k, n)$ est non résoluble en sens fort, c'est-à-dire ne se résout pas, même en utilisant toutes les $\mathcal{S}$-fonctions à un seule valeurs, les compositions, les opérations méromorphes, l'intégration, la difféenciation et la solution des équations algébriques.*

La démonstration de ce théorème utilise la théorie de Lappo-Danilevskij [12].

12 Fonctions algébriques de plusieurs variables

Jusqu'ici nous avons considéré des fonctions d'une seule variable. Nous ferons maintenant deux observations concernant les fonctions de plusieurs variables, dont les démonstrations ne demandent de nouvelles notions et s'obtiennent par la même méthode que pour les fonctions d'une seule variable.

Considérons l'équation algébrique

$$y^n + r_1 y^{n-1} + \cdots + r_n = 0, \tag{7}$$

où les r_i sont des fonctions rationnelles de k variables complexes $x_1, \ldots, x_k$.

1) Selon la théorie de Galois l'équation (7) ayant un groupe de monodromie résoluble se résout par radicaux. *Mais si le groupe de monodromie de l'équation (7) n'est pas résoluble, alors non seulement l'équation ne se résout pas par radicaux, mais ne re résout même en utilisant les radicaux de fonctions entières de plusieurs variables, les opérations arithmétiques et les compositions.* Cette assertion peut être considérée comme une variante du théorème d'Abel sur la non résolubilité des équations algébriques de degré supérieure à quatre. On peut trouver une variante plus forte au §15.

2) L'équation (7) définit une fonction algébrique de k variables. Quelles sont les conditions pour qu'on puisse représenter une fonction de k variables par des fonctions algébriques d'un nombre plus petit de variables, en utilisant les compositions et les opérations arithmétiques? En cette question consiste le treizième problème d'Hilbert[2]. Si l'on exclue les résultats remarquables dans ce sujet [13],[14][3], jusqu'à

[2]Le problème sur les compositions a été formulé par Hilbert pour les classes des fonctions continues, pas pour les fonctions algébriques. A.G. Vitushkin considéra ce problème pur les fonctions lisses et démontra la non représentabilité des fonctions de n variables avec dérivés continues jusqu'à l'ordre p par des fonctions de k variables avec dérivés continues jusqu'à l'ordre q ayant une "complexité" inférieure, c'est-à-dire pur $k/q < n/p$ [15]. Ensuite il appliqua sa méthode à la recherche de la complexité dans le problème de la tabularisation [16].

Le résultat de Vitushkin a été redémontré par Kolmogorov, en développant sa théorie de la ϵ-entropie pour les classes de fonctions, qui en mesure elle aussi la complexité: cette entropie, exprimée par le logarithm du nombre de fonctions ϵ-differentes, croit au décroître de ϵ comme $(1/\epsilon)^{n/p}$ [17].

Finalement, la solution du problème dans la formulation initiale d'Hilbert résulta opposée à la conjecture d'Hilbert: Kolmogorov [18] représenta les fonctions continues de n variables par des fonctions continues de 3 variables, Arnold [19] représenta les fonctions de trois variables par les fonctions de deux, et enfin Kolmogorov [20] représenta ces dernières par compositions de fonctions d'une seule variable e par l'opération d'addition. (*Note du traducteur*)

[3]V. I. Arnol'd [13] a découvert une approche tout à fait nouvelle à la démonstration de la non représentabilité d'une fonction algébrique entière de plusieurs variables comme composition de fonctions algébriques entières de plusieurs variables. Cette approche est basée sur l'étude de la cohomologie du complément de l'ensemble des branches de la fonction, qui conduit à l'étude de la cohomologie des groupes de tresses.

Il faut remarquer qu'ici la définition de représentabilité d'une fonction algébrique diffère de celle classique. Les formules classiques pour la résolution par radicaux des équations de degré 3 et 4 ne sont pas complètement des compositions: ces expressions par radicaux à plusieurs valeurs présent on n'a pas démontré qu'il existe de fonctions algébriques de plusieurs variables qui ne sont pas représentables par des fonctions algébriques d'une seule variable.

Cependant on connaît le résultat suivant:

THÉORÈME ([4],[5]). *Une fonction entière y de deux variables (a, b), définie par l'équation*

$$y^5 + ay + b = 0,$$

ne peut pas s'exprimer par des fonctions entières d'une seule variable au moyen de compositions, additions et soustractions.

La raison c'est la suivante. À chaque point singulier p d'une fonction algébrique on peut associer un *groupe local de monodromie*, c'est-à -dire le groupe des permutations des feuillets de la surface de Riemann qui s'obtient en faisant des tours autour des singularités de la fonctions le long de courbes qui se trouvent dans une voisinage arbitrairement petit du point p. Pour les fonctions algébriques d'une seule variable ce groupe local est commutatif; par conséquent le groupe local de monodromie d'une fonction algébrique qui s'exprime par sommes et différences des fonctions entières *doit être résoluble.* Mais le groupe local de monodromie de la fonction

$$y^5 + ay + b = 0$$

près du point $(0, 0)$ c'est le groupe non résoluble $S(5)$ de toutes les permutations de cinq éléments. Cela explique l'énoncé du théorème.

---

contiennent, avec les racines cherchées, aussi des valeurs "parasites". Les nouvelles méthodes montrent que ces valeurs parasites sont inévitables: même les équations de degré 3 et 4 ne sont pas *strictement* (c'est-à-dire sans valeurs parasites) résolubles par radicaux.

En particulier, Arnol'd démontra [13] que lorsque $n = 2^r$ $(r \geq 2)$ la fonction algébrique $\lambda(z)$ de n variables complexes $z = (z_1, \dots, z_n)$ définie par l'équation

$$\lambda^n + z_1\lambda^{n-1} + \cdots + z_n = 0$$

n'est pas strictement représentable dans un voisinage quelconque de l'origine comme composition de fonctions algébroïdales entières (la division n'est pas permise) avec moins que $n - 1$ variables et de fonctions holomorphes univaluées d'un nombre quelconque de variables. V. Ya. Lin [14] démontra la même assertion pour chaqne $n \geq 3$.

Le travail d'Arnol'd eut une grande résonance: les calculs successifs des cohomologies à des autres coefficients des groupes généralisés des tresses, permit de trouver des résultats de plus en plus étendus.

Les méthodes de la théorie des cohomologies des groupes des tresses, élaborés dans la recherche des compositions des fonctions algébriques, ont été ensuite appliquées par Vassiliev et Smale [21],[22],[23] dans la théorie du nombre topologiquement nécessaire de ramifications dans les algorithmes numériques du calcul approximé des racines des polynômes (de l'ordre de n ramifications pour un polynôme de degré n).(*Note du traducteur*)

Observons que si l'on permet d'utiliser l'opération de division, alors les argument ci-dessus ne valent plus. En effet, la division est une opération qui tue la continuité et son application détruit la localité. En fait la fonction y définie par

$$y^5 + ay + b = 0$$

s'exprime au moyen de la division par la fonction $g(x)$ d'une seule variable, définie par l'équation

$$g^5 + g + x = 0,$$

et de la fonction d'une seule variable $f(a) = \sqrt[4]{a}$. Il n'est pas difficile de voir que

$$y(a, b) = g(b/\sqrt[4]{a^5})\sqrt[4]{a}.$$

Remarque. La démonstration du dernière théorème a constitué le sujet de mon travail d'examen pendant l'année 1968. Après j'ai su que mon directeur de recherche V.I. Arnold non seulement savait comment résoudre le problème posé mais il avait aussi tenu un cours sur un sujet très proche au collège de Kolmogorov (le matériel de ses leçons est partiellement contenu dans ce livre).

13 Fonctions de plusieurs variables complexes représentables par quadratures et par quadratures généralisées

Le cas multi-dimensionnel est plus compliqué de celui unidimensionnel. Il faut donc reconsidérer les définitions de base et, en particulier, changer un peu la définition de représentabilité des fonctions par quadratures et par quadratures généralisées. Dans ce paragraphe nous donnons une nouvelle formulation du problème.

Supposons d'avoir fixé une classe de fonctions de base et un ensemble d'opérations permises. Est-ce que une fonction donnée est exprimable (étant, disons, solution d'une équation algébrique ou différentielle donnée, ou provenant d'un des autres calculs considérés) par les fonctions de base au moyen des opérations permises? Premièrement, nous nous intéresserons exactement à ce problème mais nous y donnerons un sens un peu différent. Nous considérerons les *branches à une seule valeurs* différentes d'une fonction multivaluée comme des fonctions à une seule valeur sur des domaines différents: nous considérerons ainsi chaque fonction multivaluée comme l'ensemble de ses branches à une seule valeur. Nous appliquerons les opérations permises (comme les opérations arithmétiques ou l'opération de composition) seulement aux branches à une seule valeur sur des domaines différents. Puisque nos fonctions sont analytiques, il suffit de prendre comme domaines seulement des petits voisinages des points. Le problème se pose maintenant de la façon suivante: *est-ce que* *un germe donné d'une fonction dans un point donné peut s'exprimer par les germes des fonctions de base au moyen des opérations permises?* Naturellement, ici la réponse dépend du choix du germe à une seule valeur de la fonction multivaluée donnée en ce point. Toutefois il arrive que (pour la classe qui nous intéresse de fonctions de base) ou bien la représentation cherchée n'existe pour aucun germe de la fonction multivaluée en aucun point, ou bien, au contraire, dans un certain sens par la même représentation s'exprimeront tous les germes de la fonction multivaluée donnée dans presque tous les points de l'espace. Dans le premier cas nous dirons que *aucune branche de la fonction multivaluée donnée ne s'exprime par les branches des fonctions de base au moyen des opérations permises*; dans le second cas que cette représentation *existe.*

Premièrement, observons la différence entre cette proposition du problème et celle du problème exposé au §1. *Pour les fonctions analytiques d'une seule variable entre le opérations permises il existait, en définitive, l'opération de prolongement analytique.*

En effet, considérons l'exemple suivant. Soit f_1 une fonction analytique, définie dans un domaine U du plan $\mathbb{C}^1$, qui ne se prolonge pas au delà des bornes du domaine U, et soit f_2 la fonction analytique dans le domaine U, définie par l'égalité $f_2 = -f_1$. Selon la définition au §1, la fonction identiquement nulle est représentable sous la forme $f_1 + f_2$ *pour tous les valeurs de l'argument.* Selon ce nouveau point de vue, l'égalité $f_1 + f_2 = 0$ est vraie seulement dans le domaine U, pas au dehors. Auparavant nous ne nous intéressions pas à l'existence d'un *domaine unique*, dans lequel toutes les propriété nécessaires se seraient reproduites sur les branches à une seule valeur de la fonction multivaluée: une opération pouvait se reproduire sur un domaine, et une autre opération dans un autre domaine dans le prolongement analytique des fonctions obtenues. Pour les $\mathcal{S}$-fonctions d'une seule variable on arrivait à obtenir des limitations topologiques même avec cette notion étendue d'opération sur des fonctions analytiques multivaluées. Pour les fonctions de plusieurs variables on ne peut plus utiliser cette notion étendue et il faut assumer une nouvelle formulation avec plus de limitations, qui peut sembler moins (mais qui est peut être plus) naturelle.

Commençons par des définitions précises. Fixons l'espace standard $\mathbb{C}^n$ avec le système de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$.

Définition 1) *Le germe de la fonction φ au point $a \in \mathbb{C}^n$ s'exprime par les germes des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ au point a au moyen de l'opération d'intégration* s'il satisfait l'égalité $d\varphi = \alpha$, où $\alpha = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$. Pour des germes de fonctions données $f_1, \ldots, f_n$ le germe φ existe si et seulement si la 1-forme α est fermée. Le germe φ est alors défini à une constante additive près.

2) *Le germe de la fonction φ au point $a \in \mathbb{C}^n$ s'exprime par les germes des*

fonctions $f_1, \dots, f_n$ au point a au moyen de l'opération de l'exponentiel de l'intégrale, s'il satisfait l'égalité $d\varphi = \alpha\phi$, où $\alpha = f_1dx_1 + \dots + f_ndx_n$). Pour des germes de fonctions données $f_1, \dots, f_n$ le germe φ existe si et seulement si la 1-forme α est fermée. Le germe φ est alors défini à une constante multiplicative près.

3) *Le germe de la fonction y au point $a \in \mathbb{C}^n$ s'exprime par les germes des fonctions $f_0, \dots, f_k$ au point a au moyen de l'opération de solution d'une équation algébrique*, si le germe f_0 ne s'annule pas et satisfait l'égalité

$$f_0y^k + f_1y^{k-1} + \dots + f_k = 0.$$

DÉFINITION.

1) *La classe des germes des fonctions dans $\mathbb{C}^n$, représentables par quadratures* (sur le corps des constantes) est définie par les choix suivants: les germes des fonctions de base sont les germes des fonctions constantes (en tout point de l'espace $\mathbb{C}^n$); les opérations permises sont les opérations arithmétiques, l'intégration et l'exponentiel de l'intégrale.

2)*La classe des germes des fonctions dans $\mathbb{C}^n$ représentables par quadratures généralisées* (sur le corps des constantes) est définie par les choix suivants: les germes des fonctions de base sont les germes des fonctions constantes (en tout point de l'espace $\mathbb{C}^n$); les opérations permises sont les opérations arithmétiques, l'intégration, l'exponentiel de l'intégrale et la résolution des équations algébriques.

Remarquons que les définitions ci-dessus se traduisent presque littéralement dans le cas des corps abstraits différentiels, munis de n opérations commutatives de différenciation $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Dans cette forme généralisée ces définitions appartiennent à Kolchin.

Considérons maintenant la classe des germes des fonctions, représentables par quadratures et par quadratures généralisées dans les espaces $\mathbb{C}^n$ de n'importe quelle dimension $n \geq 1$ tous ensemble. En répétant le raisonnement de Liouville (cf. théorème 1 au §2), il n'est pas difficile de démontrer que *la classe des germes des fonctions de plusieurs variables représentables par quadratures et par quadratures généralisées, contient les germes des fonctions rationnelles de plusieurs variables et les germes de toutes les fonctions élémentaires de base et que ces classes de germes sont fermées par rapport à la composition.* (La fermeture par rapport aux compositions d'une classe de germes de fonctions représentables par quadratures signifie la chose suivante: Si $f_1, \dots, f_m$ sont des germes de fonctions représentables par quadratures au point $a \in \mathbb{C}^n$ et g est un germe d'une fonction représentable par quadratures au point $b \in \mathbb{C}^m$, où $b = (f_1(a), \dots, f_m(a))$, alors le germe $g(f_1, \dots, f_m)$ au point $a \in \mathbb{C}^n$ est le germe d'une fonction représentable par quadratures.

14 $\mathcal{SC}$-germes

Est-ce qu'il existe une classe de germes de fonctions de plusieurs variables suffisamment étendue (contenant les germes des fonctions représentables par quadratures généralisés, les germes des fonctions entières de plusieurs variables et fermé par rapport aux opérations naturelles comme la composition) pour laquelle soit défini le groupe de monodromie? Dans ce paragraphe on définit la classes des $\mathcal{SC}$-germes et on énonce le théorème sur la fermeture de cette classe par rapport aux opérations naturelles: ce qui donne une réponse positive à la question posée. J'ai découvert la classe des $\mathcal{SC}$-germes relativement récemment: jusqu'alors je croyais que la réponse était négative.

Dans le cas des fonctions d'une seule variable on a gagné en introduisant la classe des $\mathcal{S}$-fonctions. Commençons par une généralisation directe de la classe des $\mathcal{S}$-fonctions au cas multidimensionnel.

Le sous-espace $A \subset M$ dans une variété connexe k-dimensionnelle analytique M est dit *maigre*, s'il existe un ensemble dénombrable d'ouverts $U_i \subset M$ et un ensemble dénombrable de sous-espaces propres analytiques $A_i \subset U_i$ dans ces ouverts tels que $A \subseteq \bigcup A_i$. Une fonction analytique multivaluée sur la variété M est appelé *$\mathcal{S}$-fonction*, si l'ensemble de ses points singuliers est maigre. Précisons cette définition.

Deux germes réguliers f_a et g_b, donnés aux points a et b de la variété M, sont dits *équivalents* si le germe g_b s'obtient par un prolongement régulier du germe f_a le long d'une certaine courbe. Chaque germe g_b, équivalent au germe f_a, est dit aussi germe *régulier* de la fonction analytique multivaluée f, engendré parle germe f_a.

Le point $b \in M$ est dit *singulier pour le germe* f_a, s'il existe une courbe $\gamma\,[0,1] \to M,\ \gamma(0) = a,\ \gamma(1) = b$, telle que le germe f_a ne peut pas être prolongé régulièrement le long de cette courbe, mais pour tout $t,\ 0 \leq t < 1$, ce germe se prolonge le long de la courbe raccourcie $\gamma\,[0,t] \to M$. Il est facile de voir que les ensembles des points singuliers pour des germes équivalents coïncident.

Un germe régulier est dit *$\mathcal{S}$-germe*, si l'ensemble de ses points singuliers est maigre. Une fonction analytique multivaluée est dite $\mathcal{S}$-fonction, si chacun de ses germes réguliers est un $\mathcal{S}$-germe.

Remarque. Pour les fonctions d'une variable complexe on a donné deux définitions de $\mathcal{S}$-fonctions. La première est comme celle ci-dessus, la seconde est donné par le théorème au §5. Ces définitions, évidemment, coïncident.

Pour les $\mathcal{S}$-fonctions de plusieurs variables les notions de *groupe de monodromie* et de *couple de monodromie* se traduisent automatiquement.

Clarifions en quoi le cas multidimensionnel est plus compliqué du cas unidimensionnel.

Imaginons d'être dans la situation suivante. Soit $f(x, y)$ une fonction analytique multivaluée de deux variables avec un ensemble A de points de ramification, où $A \subset \mathbb{C}^2$ est une courbe analytique sur le plan complexe. Il peut arriver que dans un des points $a \in A$ il existe un germe analytique f_a de la fonction analytique multivaluée f (par la définition même de l'ensemble A des points de ramification, au point a il n'existe pas tout germe de la fonction f, mais certains germes peuvent exister). Soient maintenant $g_1(t)$ et $g_2(t)$ deux fonctions analytiques de la variable complexe t, donnés par l'application de la droite complexe $\mathbb{C}$ dans le plan complexe $\mathbb{C}^2$ telles que l'image de la droite $\mathbb{C}$ soit contenue dans A, c'est-à-dire $(g_1(t), g_2(t)) \in S$ lorsque $t \in \mathbb{C}$. Soit b la préimage du point a par cette application, c'est-à-dire $a = (g_1(b), g_2(b))$. Qu'est-ce qu'on peut dire sur la fonction analytique multivaluée sur la droite complexe, engendré par le germe de $f(g_1, g_2)$ au point b, obtenu comme résultat de la composition du germe de la fonction vectorielle g_1, g_2 au point b et du germe de la fonction f au point a? Il est clair que les propriétés analytiques de cette fonction dépendent essentiellement du prolongement du germe f_a le long de la courbe singulière A.

Rien de pareil se produit lorsqu'on considère la composition de fonctions d'une seule variable. En effet, l'ensemble des singularités d'une $\mathcal{S}$-fonction d'une seule variable consiste en des points isolés. Si l'image de l'espace complexe par l'application analytique g est contenue entièrement dans l'ensemble des points singuliers de la fonction f, alors la fonction g est une constante. Il est évident que si la fonction g est une constante, une fois qu'on a définie f sur son ensemble de points singuliers, la fonction $f(g)$ résulte constante elle aussi.

Dans le cas unidimensionnel pour notre but il suffit d'étudier le caractère de multivocité de la fonction analytique seulement dans le complément de ses points singuliers. Dans le cas multidimensionnel pour notre but il faut étudier la possibilité de prolonger les germes des fonctions qui se rencontrent le long de leur ensemble des singularités (si, naturellement, le germe de la fonction est défini dans un point quelconque de l'ensemble des singularités). Il arrive que les germes des fonctions multivaluées parfois se prolongent automatiquement le long de leur ensemble des singularités [24], ce qui sauve des ennuis.

Un rôle-clé est joué dans ce qu'il suit par la définition suivante:

Définition. Le germe f_a d'une fonction analytique au point a de l'espace $\mathbb{C}^n$ s'appelle $\mathcal{SC}$-*germe* si la condition suivante est satisfaite. Pour chaque variété complexe analytique connexe M, chaque application analytique $GM \to \mathbb{C}^n$ et chaque préimage c du point a, $G(c) = a$, il existe un sous-ensemble maigre $A \subset M$ tel que pour chaque courbe $\gamma\,[0,1] \to M$, commençant au point c, $\gamma(0) = c$, et ayant intersection nulle avec l'ensemble A, sauf, au plus, à l'instant initial, $\gamma(t) \notin A$ pour $t > 0$, le germe f_a se prolonge analytiquement le long de la courbe $G \circ \gamma\,[0,1] \to \mathbb{C}^n$.

Proposition. *Si l'ensemble des points singuliers d'une $\mathcal{S}$-fonction est un en-*

semble analytique, alors chaque germe de cette fonction est un $\mathcal{SC}$-germe.

Cette proposition suit directement des résultats exposés dans [16].

Il est évident que chaque $\mathcal{SC}$-germe est le germe d'une $\mathcal{S}$-fonction. Pour les $\mathcal{SC}$-germes ce sont alors définies les notions de groupe de monodromie et de couple de monodromie.

Nous aurons besoin à l'avenir de la notion de système holonôme d'équations différentielles linéaires. Rappelons qu'un système de N équations différentielles linéaires $L_j(y) = 0$, $j = 1, \ldots, N$,

$$L_j(y) = \sum a^j_{i_1,\ldots,i_n} \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n} y}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} = 0$$

pour la fonction inconnue y, dont les coefficients $a^j_{i_1,\ldots,i_n}$ sont des fonctions analytiques de n variables complexes $x_1, \ldots, x_n$, est dit *holonôme* si l'espace de sa solution a dimension finie.

Théorème sur le fermeture de la classe des $\mathcal{SC}$-germes. *La classe des $\mathcal{SC}$-germes dans $\mathbb{C}^n$ est fermée par rapport aux opérations suivantes:*

- *1) opération de différenciation, c'est-à-dire si f est un $\mathcal{SC}$-germe au point $a \in \mathbb{C}^n$ alors pour chaque $i = 1, \ldots, n$ les germes des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont aussi des $\mathcal{SC}$-germes au point a;*

- *2) opération d'intégration, c'est-à-dire, si $df = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$, où $f_1, \ldots, f_n$ sont des $\mathcal{SC}$-germes au point $a \in \mathbb{C}^n$, alors aussi f est un $\mathcal{SC}$-germe au point a;*

- *3) opération de composition avec les $\mathcal{SC}$-germes de m variables, c'est-à-dire si $f_1, \ldots, f_m$ sont des $\mathcal{SC}$-germes au point $a \in \mathbb{C}^n$ et g est un $\mathcal{SC}$-germe au point $(f_1(a), \ldots, f_m(a))$ de l'espace $\mathbb{C}^m$, alors aussi $g(f_1, \ldots, f_m)$ est un $\mathcal{SC}$-germe au point a;*

- *4) opération de résolution des équations algébriques, c'est-à-dire si $f_0, \ldots, f_k$ sont des $\mathcal{SC}$-germes au point $a \in \mathbb{C}^n$, le germe f_0 n'est pas identiquement nul et le germe y satisfait l'équation $f_0 y^k + f_1 y^{k-1} + \cdots + f_k = 0$, alors aussi le germe y est un $\mathcal{SC}$-germe au point a;*

- *5) opération de résolution des systèmes holonômes d'équations différentielles linéaires, c'est-à-dire si le germe de la fonction y au point $a \in \mathbb{C}^n$ satisfait le système holonôme de N équations différentielles linéaires*

$$L_j(y) = \sum a^j_{i_1,\ldots,i_n} \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n} y}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} = 0,$$

dont tous les coefficients $a^j_{i_1,\ldots,i_n}$ *sont des* $\mathcal{SC}$*-germes au point* a*, alors aussi* y *est un* $\mathcal{SC}$*-germe au point* a*.*

COROLLAIRE. *Si le germe de la fonction* f *peut s'obtenir des germes de* $\mathcal{S}$*-fonctions à une seule valeur ayant un ensemble analytique de points singuliers au moyen de l'intégration, de la différenciation, des opérations méromorphes, des compositions, des résolutions des équations algébriques et des solutions des systèmes d'équations linéaires holonômes, alors le germe de* f *c'est un* $\mathcal{SC}$*-germe. En particulier, un germe qui n'est pas un* $\mathcal{SC}$*-germe, ne peut pas être représenté par quadratures généralisées.*

15 Obstructions topologiques à la représentabilité par quadratures des fonctions de plusieurs variables

Dans ce paragraphe on traitera la non représentabilité par quadratures et par quadratures généralisées des fonctions de plusieurs variables lorsqu'elle est due à des obstructions de type topologique. Ces obstructions sont tout à fait analogues à celles pour les fonctions d'une seule variable vue aux §§7-9.

THÉORÈME 1. *La classe de tous les* $\mathcal{SC}$*-germes dans* $\mathbb{C}^n$*, ayant un groupe de monodromie résoluble, est fermée par rapport aux opérations d'intégration et de différenciation. En outre, cette classe est fermée par rapport aux compositions avec les* $\mathcal{SC}$*-germes de* m *variables, où* $m \geq 1$*, ayant le groupe de monodromie résoluble.*

RÉSULTAT SUR LES QUADRATURES. *Le groupe de monodromie d'un germe d'une fonction* f*, représentable par quadratures, est résoluble. En outre, c'est résoluble aussi chaque germe de fonction, représentable par des germes de* $\mathcal{S}$*-fonctions à une seule valeur ayant un ensemble analytique de points singuliers au moyen d'intégrations, de différenciations et de compositions.*

COROLLAIRE. *Si le groupe de monodromie de l'équation algébrique*

$$y^k + r_1 y^{k-1} + \cdots + r_k = 0,$$

dans lequel les r_i *sont des fonctions rationnelles de* n *variables, n'est pas résoluble, alors aucun germe de sa solution non seulement ne peut pas s'exprimer par radicaux, mais ne peut pas être représenté par des germes de* $\mathcal{S}$*-fonctions à une seule valeur ayant un ensemble analytique de points singuliers au moyen d'intégrations, de différenciations et de compositions.*

Ce corollaire représente la variante la plus forte du théorème d'Abel.

Théorème 2. *La classe de tous les $\mathcal{SC}$-germes dans $\mathbb{C}^n$, ayant un couple de monodromie presque résoluble, est fermée par rapport à l'opération d'intégration, de différenciation et de résolution des équations algébriques. En outre, cette classe est fermée par rapport aux compositions avec $\mathcal{SC}$-germes de m variables, où $m \geq 1$, ayant un couple de monodromie presque résoluble.*

Résultat sur les quadratures généralisées. *Le couple de monodromie d'un germe d'une fonction f, représentable par quadratures généralisées, est presque résoluble. En outre, c'est presque résoluble aussi le couple de monodromie de chaque germe d'une fonction f, représentable par des germes de $\mathcal{S}$-fonctions à une seule valeur ayant un ensemble analytique de points singuliers au moyen d'intégrations, de différenciations, de compositions et de résolutions d'équations algébriques.*

16 Obstructions topologiques à la résolubilité des systèmes holonômes d'équations différentielles linéaires.

16.1 Le groupe de monodromie d'un système holonôme d'équations différentielles linéaires

Considérons un système holonôme de N équations différentielles $L_j(y) = 0$, $j = 1, \dots, N$,

$$L_j(y) = \sum a^j_{i_1,\dots,i_n} \frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} y}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = 0,$$

oú y c'est la fonction inconnue, et les coefficients $a^j_{i_1,\dots,i_n}$ sont des fonctions rationnelles des n variables complexes $x_1, \dots, x_n$.

On sait qu'il existe une hypersurface algébrique singulière Σ pour un système holonôme dans l'espace $\mathbb{C}^n$, ayant les propriétés suivantes. Chaque solution du système se prolonge analytiquement le long de n'importe quelle courbe qui ne coupe pas l'hypersurface Σ. Soit V l'espace de dimension finie des solutions d'un système holonôme au voisinage d'un point x_0, qui se trouve hors de l'hypersurface Σ. Prenons une courbe arbitraire $\gamma(t)$ dans l'espace $\mathbb{C}^n$ avec point initial x_0, ne passant pas à travers de l'hypersurface Σ. Les solutions du système se prolongeront analytiquement le long de la courbe γ, restant des solutions du système. Par conséquent à chaque courbe γ de ce type correspond une transformation linéaire M_γ de l'espace des solutions V dans lui-même. La totalité des transformations linéaires M_γ, correspondant à toutes les courbes γ forment un groupe, qui s'appelle *groupe de monodromie du système holonôme.*

Kolchin généralisa la théorie de Picard-Vessiot au cas des systèmes holonômes d'équations différentielles. De la théorie de Kolchin nous obtenons des corollaires concernant la résolubilité par quadratures des systèmes holonômes d'équations différentielles. Comme dans le cas unidimensionnel, un système holonôme est dit *régulier* si approchant à l'ensemble singulier Σ et à l'infini les solutions du système holonôme croissent au plus comme une puissance.

THÉORÈME 1. *Un système holonôme régulier d'équations différentielles linéaires se résout par quadratures et par quadrature généralisées si son groupe de monodromie est, respectivement, résoluble et presque résoluble.*

La théorie de Kolchin démontre au même temps deux résultats.

- 1) *Si le groupe de monodromie d'un système holonôme régulier d'équations différentielles linéaires est résoluble (presque résoluble), alors ce système se résout par quadratures (par quadratures généralisées).*

- 2) *Si le groupe de monodromie d'un système holonôme régulier d'équations différentielles linéaires n'est pas résoluble (pas presque résoluble), alors ce système ne se résout pas par quadratures (par quadratures généralisées).*

Notre théorème permet de rendre plus fort le résultat (2).

THÉORÈME 2. *Si le groupe de monodromie d'un système holonôme d'équations différentielles linéaires n'est pas résoluble (pas presque résoluble), alors chaque germe de presque toute solution de ce système ne peut pas s'exprimer par des germes de $\mathcal{S}$-fonctions à une seule valeur ayant un ensemble analytique de points singuliers au moyen de compositions, opérations méromorphes, intégrations et différenciation (au moyen de compositions, opérations méromorphes, intégrations, différenciation et résolutions d'équations algébriques).*

16.2 Systèmes holonômes d'équations différentielles linéaires avec de petits coefficients

Considérons un système d'équations différentielles linéaires complètement intégrable de la forme suivante

$$dy = Ay \tag{8}$$

où $y = y_1, \dots, y_n$ est la fonction-vecteur inconnue et A est une matrice $(n \times n)$, consistant en 1-formes différentielles avec des coefficients rationnels dans l'espace $\mathbb{C}^n$, satisfaisant la condition de complète intégrabilité $dA + A \wedge A = 0$ et ayant la forme suivante

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i \frac{dl_i}{l_i},$$

où les A_i sont des matrices constantes et les l_i sont des fonctions linéaires non homogènes dans $\mathbb{C}^n$.

Si les matrices A_i se mettent toutes ensembles dans la forme triangulaires, alors le système (8), comme tout système triangulaire complètement intégrable, se résout par quadratures. Il y a pourtant sans doute des systèmes intégrables non triangulaires. Toutefois, si les matrices A_i sont suffisamment petites, ces systèmes n'existent pas. Plus précisément, on démontre le théorème suivant.

Théorème 3. *Un système complètement intégrable (8) non triangulaire, avec les modules des matrices A_i suffisamment petits, n'est pas résoluble en sens fort, c'est-à-dire même en utilisant les germes de toutes les $\mathcal{S}$-fonctions à une seule valeur, ayant un ensemble analytique de points singuliers, au moyen des compositions, des opérations méromorphes, des intégrations, des différenciations et des résolutions des équations algébriques.*

La démonstration de ce théorème utilise une variante multidimensionnelle du théorème de Lappo-Danilevskij [26].

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Ritt Integration in finite terms. Liouville's theory of elementary methods N. Y. Columbia Univ. Press. 1948

2.I. Kaplanskij , Vvedenie v differentsial'nuyu algebru. M.: Mir 1959

3. M.F. Singer Formal solutions of differential equations. J. Symbolic computation, 10 1990 pp. 59–94

4. A. Khovanskii. The representability of algebroidal functions as compositions of analytical functions and one-variable algebroidal functions. Functional Analysis and its applications 4, 2 1970, pp. 74–79

5. A. Khovanskii On compositions of analytical functions with radicals, Uspehi Matem. Nauk , 26, 2 1971 pp. 213–214

6. A. Khovanskii On representability of functions by quadratures. Uspehi Matem. Nauk 26,4 1971 pp. 251–252

7. A. Khovanskii. Riemann surfaces of functions, representable by quadratures. Reports of VI All-Union Topological Conference, Tbilisi, 1972.

8. A. Khovanskii. The representability of function by quadratures, PhD, Moscow, 1973 pp. 1–76

9. A. Khovanskii and Yu.Ilyashenko Galois theory of systems of Fuchs-type differential equations with small coefficients, Preprint IPM 117 1974

10. A. Khovanskii. Topological obstructions for representability of functions by quadratures. Journal of dynamical and control systems 1,1, 1995 pp. 99–132

11. F. Klein. Vorlesugen uber die hypergeometriche funktion, Berlin 1933

12. I.A. Lappo-Danilevskij. Primenenie funktsiĭ ot matrits k teorii lineĭnykh sistem obyknovennykh differentsialp1nykh uravnenij. M.: GITTL 1957

13. V.I. Arnol'd, O Classah kogomologij algebraicheskih funkcij, sohranyayushchihsya pri preobrazovaniyah Tchirnhausena, Funct. Anal., 1970, v. 4, n.1, pp 84–85.

14. Lin V. Ya., Superpositions of algebraic functions, Funct. Anal., 1976, v. 10, n. 1, pp. 32–38.

15. A.G. Vitushkin, K tridnadcatoj probleme Gilberta, Dokl. AN SSSR 1954. v. 95, n. 4, pp. 701–74. (aussi: Nauka, Moskow, 1969, 163-170).

16. A.G. Vitushkin, nekotorye ocenki iz teorii tabulirovaniya, Dokl. AN SSSR 1957, v. 114, pp. 923–926.

17. A.N. Kolmogorov, Ocenki chisla elementov ϵ-setej v razlichnyh funkcional'nyh klassah i ih primenenie k voprosu o predstavimosti funkcij neskol'kih peremennyh superposicyami funkcij men'shego chisla peremennyh. UMN, 1955, v. 10 n. 1 pp 192 –194.

18. A.N. Kolmogorov, O predstavlenii neprerivnyh funkcij neskol'kih peremennyh superposiciami neprerivnyh funkcij men'shego chisla peremennyh. DAN SSSR, 1956 v. 108, n. 2, pp. 179–182.

19. V.I.Arnol'd, O funkciyah treh peremennyh DAN SSSR, 1957 v. 114 n. 4 pp 679–681.

20. A.N. Kolmogorov, O predstavlenii neprerivnyh funkcij neskol'kih peremennyh v vide superposicij neprerivnyh funkcij odnogo peremennogo. DAN SSSR, 1957 v. 114, n. 5, pp. 953–956.

21. V. A. Vassiliev, Cohomologii grupp kos i slozhnost' algoritmov, Funct. Anal., 1988, v. 22, n. 3, pp. 15-24.

22. S. Smale, On the topology of algorithms, I, J. Complexity, 1987, v. 4, n. 4, pp. 81–89.

23. V.A. Vassiliev, Complements of discriminants of smooth maps, topology and applications, Transl. of Math. Monographs, 98, AMS Providence, 1994.

24. A. Khovanskii On the continuability of multivalued analytic functions to an analytic subset , Functional Analysis and its applications 35, 1 2001 pp. 62–73

25. A. Khovanskii. A multi-dimensional topological version of Galois theory. Proceeding of International Conference "Monodromy in Geometry and Differential Equations", 25–30 June, Moscow 2001

26. V.P. Leksin. O zadache Rimana–Gil'berta dlya analiticheskikh semeĭstv predstavleniĭ, Matematicheskie zametki 50 1991 2 pp 89–97