РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ (ТЕОРИЯ ЛИУВИЛЛЯ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ГАЛУА, ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ)

В этом дополнении рассказывается о разрешимости и о неразрешимости уравнений в конечном виде. Это очень старая задача. Идея ее решения восходит к Абелю. На сегодняшний день известно три подхода к решению этой задачи. Первый подход принадлежит Лиувиллю. Во втором подходе задача рассматривается с точки зрения теории Галуа. Он связан с именами Пикара, Вессио, Колчина и др. Третий, топологический, подход для случая функции одной переменной был построен в моей кандидатской диссертации. Я бесконечно признателен моему учителю В.И.Арнольду, заинтересовавшему меня этой тематикой. Мне всегда казалось, что топологический подход не переносится в полном объеме на случай функций многих переменных. И лишь недавно было обнаружено, что это неверно и что в многомерной ситуации можно получить вполне аналогичные результаты [17].

Настоящее дополнение основано на конспектах двух моих лекций, прочитанных в октябре 1994 в Московском Независимом Университете для студентов Ecole Normale Superieure и на заседании Московского Математического Общества. К переработанным конспектам прибавлены параграфы, посвященные функциям многих переменных, написанные осенью 2002 года.

Я признателен Т.В.Белокриницкой за помощь при подготовке настоящего дополнения и F. Aicardi за перевод текста на английский и французский языки.

1. Разрешимость уравнений в конечном виде

Некоторые дифференциальные уравнения «решаются явно». Что это значит? Если решение предъявлено, оно само и дает ответ на этот вопрос. Обычно все же попытки явного решения уравнений оказываются безуспешными. Возникает желание доказать, что для тех или иных уравнений явных решений не существует. Тут уже просто необходимо точно определить, о чем идет речь (иначе непонятно, что, собственно, мы собираемся доказать).

Это можно сделать следующим образом: выделить тот или иной класс функций и сказать, что уравнение решается явно, если его решение принадлежит этому классу. Разные классы функций соответствуют разным понятиям разрешимости. Класс функций можно выделить, задав список *основных функций* и список *допустимых операций*. После этого класс функций определяется как множество всех функций, которые получаются из основных функций при помощи применения допустимых операций. В начале мы будем иметь дело с функциями одной переменной. При работе с функциями многих переменных нам придется слегка пересмотреть основные определения.

Перечислим примеры классических классов функций одной переменной.

Пример 1. Класс функций, *представимых в радикалах.*
Список допустимых функций: константы, независимая переменная x.

Список допустимых операций: арифметические операции (сложение, умножение, деление) и операции взятия радикалов $\sqrt[n]{f}$, $n = 2, 3, \ldots$ из заданной функции f. Функция $g(x) = \sqrt[3]{5x = 2\sqrt[2]{x}} + \sqrt[7]{x^3 + 3}$ доставляет пример функции, представимой в радикалах.

С этим классом связана знаменитая задача о разрешимости уравнений в радикалах. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$y^n + r_1 y^{n-1} + \cdots + r_n = 0, \ (1)$$

в котором r_i – рациональные функции одной переменной. Полный ответ на вопрос о разрешимости уравнения (1) в радикалах дает теория Галуа (см. п. 8).

Уже в простейшем примере 1 мы встречаемся с неприятностью: функции, с которыми мы имеем дело, многозначны. Уточним, например, что такое сумма двух многозначных функций.

Определение. Возьмем произвольную точку a на комплексной прямой, один из ростков f_a аналитической функции f в точке a и один из ростков g_a аналитической функции g в той же точке a. Будем говорить, что многозначная функция φ, порожденная ростком $\varphi_a = f_a + g_a$, *представима в виде суммы функций* f и g.

Абсолютно аналогично определяются и другие операции над многозначными функциями. Отметим, что сумма двух многозначных функций определена неоднозначно. Например, легко видеть, что ровно две функции представляются в виде $\sqrt{x} + \sqrt{x}$, это $f_1 = 2\sqrt{x}$ и $f_2 \equiv 0$. *Замкнутость какого-либо класса многозначных функций относительно сложения означает, что этот класс вместе с любыми двумя функциями содержит все функции, представимые в виде их сумм.* То же самое нужно сказать и про все другие операции над многозначными функциями, которые встречаются как в приведенном определении, так и на протяжении всего дополнения до п. 12 включительно.

Замечание. В приведенном выше определении важную роль играет не только сама операция сложения, но и операция аналитического продолжения, спрятанная в понятии многозначной функции. Пока мы имеем дело с функциями одного переменного, это обстоятельство не так уж существенно. При переходе к функции многих переменных операцию аналитического продолжения необходимо исключить, что приводит к пересмотру основных определениий (см. п. 13).

Пример 2. *Элементарные функции*. Основные элементарные функции – это те функции, которые мы проходим в школе и которые обычно вносятся в клавиатуры калькуляторов. Вот их список: константы, независимая переменная x, радикалы $\sqrt[n]{x}$, экспонента $\exp x$, логарифм $\ln x$, тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$. Допустимые операции: арифметические операции, суперпозиции.

Элементарные функции записываются формулами, например, следующей

$$f(x) = arctg\left(\exp(\sin x) + \cos x\right).$$

Когда мы начинаем учить анализ, нас учат интегрировать элементарные функции, и это оказывается далеко не простым занятием. Как доказал Лиувилль, неопределенный интеграл от элементарной функции обычно не является элементарной функцией.

Пример 3. *Функции, представимые в квадратурах.* Основные функции в этом классе – это основные элементарные функции. Допустимые операции – арифметические операции, суперпозиция и интегрирование. (Класс функций называется *замкнутым относительно интегрирования*, если с каждой функцией содержит каждую функцию g такую, что $g' = f$. Функция g определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной.)

Например, функция

$$\exp\left(\int^{x} \frac{dx}{\ln x}\right)$$

представима в квадратурах. Но, как доказал Лиувилль, эта функция не является элементарной.

Примеры 2 и 3 имеют модификацию. Скажем, что класс функций замкнут относительно решения алгебраических уравнений, если с каждыми функциями $f_1, \ldots, f_n$ он содержит функцию y, удовлетворяющую алгебраическому уравнению

$$y^n + f_1 y^{n-1} + \cdots + f_n = 0.$$

Пример 4. Если в определение класса элементарных функций добавить операцию решения алгебраических уравнений, то получится определение класса *обобщенных элементарных функций*.

Пример 5. Функции, представимые в *обобщенных квадратурах,* – это класс функций, получаемый из класса функций, представимых в квадратурах, добавлением операции решения алгебраических уравнений.

2. Теория Лиувилля

Первые строгие доказательства неразрешимости некоторых уравнений в квадратурах и в элементарных функциях были получены в середине прошлого века Лиувиллем. Здесь мы очень кратко обсудим его результаты.

Изложение метода Лиувилля и близких работ Чебышева, Мордухай-Болтовского, Островского и Ритта можно найти в книге [1].

Прежде всего Лиувилль показал, что классы функций из примеров 2-5 можно построить значительно проще. Бросается в глаза громоздкость списка основных элементарных функций. Кроме того в определениях участвует неприятная с алгебраической точки зрения операция суперпозиции. Лиувилль, во-первых, показал, что можно значительно упростить списки основных функций, в половине случаев оставив в них лишь константы, а во второй половине – лишь константы и независимую переменную. Во-вторых, он показал, что в списках допустимых операций операция суперпозиции лишняя. Определения всех необходимых операций можно дать, использую лишь арифметические оптации и дифференцирование. Этот факт играет ключевую роль для алгебраизации задачи – перечисленные операции есть в дифференциальных полях. Приведем соответствующие определения из дифференциальной алгебры.

Поле функций F называется *дифференциальным полем*, если оно замкнуто относительно дифференцирования, т.е. если из $g \in F$ вытекает, что $g' \in F$. Можно рассматривать и абстрактные дифференциальные поля, т.е. поля, в которых определена дополнительная линейная операция дифференцирования, удовлетворяющая тождеству Лейбница $(ab)' = a'b + ab'$.

Пусть есть дифференциальное поле F_0, лежащее в большем дифференциальном поле F, $F_0 \subseteq F$. Элемент $y \in F$ называется *алгебраическим* над полем F_0, если y удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

с коэффициентами a_i из поля F_0. В частности, элемент y называется *радикалом* над полем F_0, если $y^k \in F_0$. Элемент y называется *интегралом* над полем F_0, если $y' \in F_0$. Элемент y называется *логарифмом* над полем F_0, если $y' = a'/a$, где $a \in F_0$. Элемент y называется *экспонентой интеграла* над полем F_0, если $y' = ay$, $a \in F_0$. Элемент y называется *экспонентой* над полем F_0, если $y' = a'y$. *Расширением поля* F_0 при помощи элемента y называется наименьшее дифференциальное поле $F_0\{y\}$, содержащее F_0 и y. Поле $F_0\{y\}$ состоит из рациональных функций от $y, y', \ldots, y^{(k)}$ с коэффициентами в поле F_0.

1) Элемент y называется *представимым в радикалах над полем* F_0, если существует цепочка расширений $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_k$, такая, что каждое расширение $F_i \subseteq F_{i+1}$ есть присоединение радикала над полем F_i, и поле $F\{y\}$ содержится в поле F_k.

По такой же схеме определяются и другие виды представимости элемента y над полем F_0. В виде «строительных кирпичиков» в этих определениях используются другие виды расширения $F_i \subseteq F_{i+1}$.

2) *Элементарный элемент* y над полем F_0. Здесь допускается рисоединение логарифмов и экспонент.
3) Элемент y *представим в квадратурах над полем* F_0. Здесь допускается присоединение интегралов и экспонент интегралов.
4) *Обобщенный элементарный элемент* y *над полем* F_0. Здесь допускается присоединение алгебраических элементов, экспонент и логарифмов.

5) Элемент y *представим в обобщенных квадратурах над полем* F_0. Здесь допускается присоединение алгебраических элементов, интегралов, экспонент интегралов.

Справедлива следующая

Теорема 1 (Лиувилль). *Функция* y *является элементарной (обобщенной элементарной), если и только если она является элементарной (обобщенной элементарной) над полем рациональных функций* $\Re$. *Функция* y *является представимой в квадратурах (представимой в обобщенных квадратурах), если и только если она является представимой в квадратурах (представимой в обобщенных квадратурах) над полем комплексных чисел* **C**.

Основная элементарная функция $f(x) = arctgx$ представима в квадратурах над полем F_o= **C**. Действительно, это видно из обращения равенств $f' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x' \equiv 1$. Для доказательства, например, той части теоремы 1, которая относится к функциям, представимым в квадратурах, достаточно проверить, что, во-первых, для всех основных элементарных функций имеется аналогичное представление, и, во-вторых, что класс функций, представимых в квадратурах над полем **C**, относительно суперпозиций.

Лиувилль построил красивую теорию разрешимости уравнений. Приведем два примера его результатов.

Теорема 2 (Лиувилль). *Неопределенный интеграл* y *от алгебраической функции* A *комплексной переменной* x *берется в обобщенных элементарных функциях, если и только если он представим в виде*

$$y(x) = \int^{x} A(x)\,dx = A_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \ln A_i(x),$$

где A_i при $i = 0,1,\ldots k$ – *алгебраические функции, однозначные на римановой поверхности подынтегральной функции* A.

Априори интеграл алгебраической функции мог бы задаваться очень сложной формулой. Скажем, он мог бы иметь вид

$$y = \exp\Big(\exp\Big(\exp\Big(\exp\Big(\exp(x)\Big)\Big)\Big)\Big).$$

Теорема 2 показывает, что ничего такого случиться не может. Или интеграл алгебраической функции имеет описанный простой вид, или вообще не является обобщенной элементарной функцией.

Теорема 3 (Лиувилль). *Линейное дифференциальное уравнение*

$$y'' + py' + q = 0, \quad (2)$$

где p и q – *рациональные функции от* x, *решается в обобщенных квадратурах, если и только если одно из его решений представимо в виде*

$$y = \exp\left(\int^{x} A(x)\,dx\right),$$

где A *– алгебраическая функция.*

Априори у уравнения (2) могли бы существовать решения, определенные очень сложными формулами. Теорема 3 показывает, что ничего такого случиться не может. Или уравнение имеет достаточно простые решения, или вообще не задается в обобщенных квадратурах.

Лиувилль получил целый ряд результатов такого рода. Общая идеология их такая же: простые уравнения либо имеют достаточно простые решения, либо вообще не решаются в заданном классе (в квадратурах, в элементарных функциях и т.д.)

Стратегия доказательств в теории Лиувилля следующая: показывается, что если простое уравнение имеет решение, записанное сложной формулой, то, на самом деле, эту формулу можно упростить.

Лиувилль, несомненно, был вдохновлен результатами Абеля и Галуа о неразрешимости алгебраических уравнений в радикалах. В отличии от теории Галуа в теории Лиувилля понятие группы автоморфизмов не фигурирует. Хотя на самом деле Лиувилль упрощает формулы именно при помощи «бесконечно малых автоморфизмов».

Вернемся к теореме 2 об интегралах алгебраических функций. Из этой теоремы легко выводится следующее

Следствие. *Если интеграл от ненулевой алгебраической функции* A *является обобщенной элементарной функцией, то дифференциальная форма* $A(x)dx$ *неизбежно имеет особенности на римановой поверхности алгебраической функции* A.

Как известно, на всякой алгебраической кривой положительного рода существуют дифференциальные формы без особенностей (так называемые абелевы дифференциалы первого рода). Поэтому алгебраические функции, риманова поверхность которых имеет положительный род, вообще говоря, не интегрируются в обобщенных элементарных функциях.

Этот факт был известен еще Абелю, который открыл его вместе с доказательством неразрешимости общего уравнения пятой степени в радикалах. Отметим в связи с этим, что доказательство Абеля неразрешимости в радикалах (которому, в сущности, и посвящается эта книга) основано на топологических соображениях. Я не знаю, различаются ли типологически расположения над комплексной плоскостью римановых поверхностей функций, представимых в обобщенных квадратурах, и римановых поверхностей обобщенных элементарных функций. Поэтому *я не умею топологически доказывать неэлементарность интеграла ни для какой* конкретной *алгебраической функции*: каждый такой интеграл по самому определению является функцией, представимой в обобщенных квадратурах. Однако, если алгебраическая функция алгебраически зависит от параметра, то ее интеграл может зависеть от параметра весьма сложным образом.

Удается топологически доказать, что *интеграл алгебраической функции как функция параметра может не выражаться в обобщенных квадратурах и,* следовательно, *может не быть обобщенной элементарной функцией от параметра* (см. пример из п. 9).}

3. Теория Пикара–Вессио

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + r_1 y^{(n-1)} + \cdots + r_n y = 0, \qquad (3)$$

в котором r_i – рациональные функции комплексного переменного x.

В окрестности неособой точки x_0 существует n линейно независимых решений $y_1, \ldots, y_n$ уравнения (3). В этой окрестности можно рассмотреть поле функций $\Re\{y_1, \ldots, y_n\}$, полученное присоединением к полю рациональных функций $\Re$ всех решений y_i и всех их производных $y_i^{(p)}$ до порядка $(n-1)$. (Производные большего порядка находятся из уравнения (3).)

Поле функций $\Re\{y_1, \ldots, y_n\}$ является дифференциальным полем, т.е. оно замкнуто относительно дифференцирования, также как и поле рациональных функций $\Re$. Автоморфизмом дифференциального поля F называется автоморфизм σ поля F, сохраняющий операцию дифференцирования, т.е. $\sigma(g') = [\sigma(g)]'$. Рассмотрим автоморфизм σ дифференциального поля $\Re\{y_1, \ldots, y_n\}$, который оставляет неподвижными все элементы поля $\Re$. Совокупность всех таких автоморфизмов образует группу, которая называется *группой Галуа* уравнения (3). Каждый автоморфизм σ из группы Галуа переводит решение уравнения в решение уравнения, поэтому ему отвечает линейное преобразование M_σ пространства решений V^n. Автоморфизм σ вполне определяется преобразованием M_σ, так как поле $\Re\{y_1, \ldots, y_n\}$ порождается функциями y_i. Вообще говоря, не каждое линейное преобразование пространства V^n может быть продолжено до автоморфизма σ из группы Галуа. Дело в том, что автоморфизмы σ обязаны сохранять все дифференциальные соотношения, существующие между решениями. Группу Галуа можно рассматривать как некоторую группу линейных преобразований решений. Эта группа оказывается алгебраической.

Итак, группа Галуа уравнения – это алгебраическая группа линейных преобразований пространства решений, сохраняющих все дифференциальные соотношения между компонентами решений.

Пикар начал систематически переносить теорию Галуа на случай линейных дифференциальных уравнений. Как и в обычной теории Галуа здесь существует взаимно-однозначное *соответствие Галуа* между промежуточными дифференциальными полями и алгебраическими подгруппами группы Галуа.

Пикар и Вессио показали в 1910 году, что за разрешимость уравнения в квадратурах и в обобщенных квадратурах отвечает только его группа Галуа.

Теорема Пикара–Вессио. *Для разрешимости дифференциального уравнения в квадратурах необходимо и достаточно, чтобы группа Галуа была разрешима. Для разрешимости дифференциального уравнения в обобщенных квадратурах необходимо и достаточно, чтобы компонента связности единицы в группе Галуа была разрешима*.

Основные результаты дифференциальной теории Галуа можно найти в книге [2]. В [3] дается краткий обзор современного состояния предмета и приводится довольно обширная библиография.

Отметим, что из теоремы Пикара–Вессио несложно вывести, что если уравнение (3) решается в обобщенных квадратурах, то у него есть решение $y_1 = \exp\left(\int^x A_1(x)\,dx\right)$, где A_1 – алгебраическая функция. Если уравнение имеет явное решение y_1, то его порядок можно понизить, введя новую неизвестную функцию $z = (y/y_1)'$. Функция z удовлетворяет явно выписываемому линейному дифференциальному уравнению меньшего порядка. Если исходное уравнение было разрешимым, то уравнение для функции z тоже должно быть разрешимым. Поэтому оно по теореме Пикара–Вессио должно иметь решение вида $z_1 = \exp\int A_2(x)dx$, где A_2 – алгебраическая функция и т.д. Итак, мы видим, что если линейное уравнение решается в обобщенных квадратурах, то оно имеет решения, задаваемые не слишком сложными формулами. Здесь подход Пикара–Вессио смыкается с подходом Лиувилля. Более того, критерий разрешимости уравнения в обобщенных квадратурах можно сформулировать, не упоминая о группе Галуа. Именно. Уравнение (3) порядка n решается в обобщенных квадратурах, если и только если оно имеет решение вида $y_1 = \exp\int^x A(x)dx$ и уравнение порядка $(n-1)$ для функции z решается в обобщенных квадратурах.

Именно в таком виде эта теорема была найдена и доказана Мордухай-Болтовским. Мордухай-Болтовский получил этот результат в том же 1910 году методом Лиувилля, независимо от работ Пикара и Вессио. Теорема Мордухай-Болтовского – обобщение теоремы Лиувилля (см. теорему 3 предыдущего параграфа) на линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка.

4. Топологические препятствия представимости функций в квадратурах

Существует третий подход к проблеме представимости функций в квадратурах (см. [4-10]). Мы рассматриваем функции, представимые в квадратурах, как многозначные аналитические функции одного комплексного переменного. Оказывается, что существуют топологические ограничения на характер расположения над комплексной плоскостью римановой поверхности функции, представимой в квадратурах. Если функция не удовлетворяет этим ограничениям, то ее нельзя выразить в квадратурах.

Этот подход кроме геометрической наглядности имеет следующее преимущество. Топологические запреты относятся к характеру многозначности функции. Они сохраняются не только для функций, представимых в квадратурах, но и для значительно более широкого класса функций. Этот более широкий класс получится, если к функциям, представимым в квадратурах, добавить все мезоморфные функции и разрешить им участвовать во всех формулах. Из-за этого топологические результаты о непредставимости в квадратурах оказываются более сильными, чем алгебраические. Дело в том, что суперпозиция функций – не алгебраическая операция. В дифференциальной алгебре вместо суперпозиции функций рассматривается дифференциальное уравнение, которому она удовлетворяет. Но, например, Γ-функция Эйлера не удовлетворяет никакому алгебраическому дифференциальному уравнению. Поэтому безнадежно искать уравнение, которому удовлетворяет, скажем, функция $\Gamma(\exp x)$. Единственные известные результаты о непредставимости функций в квадратурах и, скажем, в Γ-функциях Эйлера получены только нашим методом.

С другой стороны, этим методом невозможно доказать непредставимость в квадратурах какой-либо однозначной мероморфной функции.

Используя дифференциальную теорию Галуа (а точнее, ее линейно-алгебраическую часть, имеющую дело с алгебраическими матричными группами и их дифференциальными инвариантами), можно показать, что единственные причины неразрешимости в квадратурах линейных дифференциальных уравнений типа Фукса топологические (ср. п. 11). Другими словами, если к разрешимости в квадратурах дифференциального уравнения типа Фукса не существует топологических препятствий, то оно решается в квадратурах.

Существуют следующие топологические препятствия к представимости функций в квадратурах, обобщенных квадратурах.

Во-первых, функции, представимые в обобщенных квадратурах, и, в частности, функции, представимые в квадратурах, могут иметь не более чем счетное число особых точек на комплексной плоскости (см. п. 5). (Хотя уже для простейших функций, представимых в квадратурах, множество особых точек может быть всюду плотным!)

Во-вторых, группа монодромии функции, представимой в квадратурах, обязательно разрешима (см. п. 7). (Хотя уже для простейших функций, представимых в квадратурах, группа монодромии может содержать континуум элементов!)

Аналогичные ограничения на расположение римановой поверхности существуют и для функций, представимых в обобщенных квадратурах. Однако эти ограничения формулируются сложнее. В них группа монодромии фигурирует не как абстрактная группа, а как группа перестановок множества листов функции. Или, другими словами, в этих ограничениях фигурирует не только группа монодромии, но и *монодромная пара* функции, состоящая из ее группы монодромии и стационарной подгруппы некоторого ростка (см. п. 9).

Переходим к более подробному описанию этого геометрического подхода к проблеме разрешимости.

5. S -функции

Определим класс функций, внутри которого будут проводиться дальнейшие рассмотрения. Многозначная аналитическая функция одного комплексного переменного называется S -*функцией*, если множество ее особых точек не более чем счетно. Уточним это определение.

Два регулярных ростка f_a и g_b, заданных в точках a и b сферы Римана S^2, называются эквивалентными, если росток g_b получается из ростка f_a регулярным продолжением вдоль некоторой кривой. Каждый росток g_b, эквивалентный ростку f_a, называется также регулярным ростком многозначной аналитической функции f, порожденной ростком f_a.

Точка $b \in S^2$ называется особой для ростка f_a, если существует кривая $\gamma:[0,1]\to S^2$, $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=b$, такая, что росток не может быть регулярно продолжен вдоль этой кривой, но для любого t, $0 \le t < 1$, росток регулярно продолжается вдоль укороченной кривой $\gamma:[0,1]\to S^2$. Легко видеть, что у эквивалентных ростков множества особых точек совпадают.

Регулярный росток называется S -ростком, если множество его особых точек не более чем счетно. Многозначная аналитическая функция называется S -функцией, если каждый ее регулярный росток является S -ростком. Справедлива следующая теорема.

Теорема о замкнутости класса S -функций ([6], [8], 10]). *Класс S всех S -функций замкнут относительно следующих операций:*

1) *операции дифференцирования, т.е. если $f \in S$, то $f' \in S$;*

2) *операции интегрирования, т.е. если $f \in S$, то $\int f(x)dx \in S$;*

3) *суперпозиции, т.е. если $g, f \in S$, то $g \circ f \in S$;*

4) *мероморфных операций, т.е если $f_i \in S$, $i = 1,\ldots,n$, $F(x_1,\ldots,x_n)$ – мероморфная функция n переменных и $f = F(f_1,\ldots,f_n)$, то $f \in S$;*[*]

5) *решения алгебраических уравнений, т.е. если $f_i \in S$, $i = 1,\ldots,n$, и $f^n + f_1 f^{n-1} + \cdots + f_n = 0$,* то *$f \in S$;*

6) *решения линейных дифференциальных уравнений, т.е. если $f_i \in S$, $i = 1,\ldots,n$ и $f^{(n)} + f_1 f^{(n-1)} + \cdots + f_n = 0$, то $f \in S$.*

---

[*] Подробнее. *Мероморфная операция*, определенная мероморфной функцией $F(x_1,\ldots,x_n)$, сопоставляет функциям $f_1,\ldots,f_n$ новую функцию $F(f_1,\ldots,f_n)$. Арифметические операции и потенцирование являются примерами мероморфных операций, соответствующих функциям $F_1(x,y) = x + y$, $F_2(x,y) = x \cdot y$, $F_3(x,y) = x / y$ и $F_4(x) = \exp x$.

Следствие. *Если многозначную функцию f можно получить из однозначных S-функций с помощью интегрирования, дифференцирования, мероморфных операций, суперпозиций, решения алгебраических уравнений и линейных дифференциальных уравнений, то функция f меет не более чем счетное число особых точек. В частности, функцию, имеющую несчетное число особых точек, нельзя представить в обобщенных квадратурах.*

6. Группа монодромии

Группа монодромии S-функции f с множеством особых точек A – это группа всех перестановок листов функции f, которые происходят при обходе точек множества A. Подробнее.

Пусть F_a – множество всех ростков S-функции f в точке a, не лежащей в множестве ее особых точек A. Возьмем замкнутую кривую γ в $S^2 \setminus A$ с началом в точке a. Продолжение каждого ростка из множества F_a вдоль кривой γ приводит к ростку из множества F_a.

Итак, каждой кривой γ соответствует отображение множества F_a в себя, причем гомотопным в $S^2 \setminus A$ кривым отвечают одинаковые отображения. Произведению кривых отвечает произведение отображений. Возникает гомоморфизм τ фундаментальной группы множества $S^2 \setminus A$ в группу $S(F_a)$ взаимнооднозначных преобразований множества F_a. *Группой монодромии* S-функции f называется образ фундаментальной группы $\pi(S^2 \setminus A, a)$ в группе $S(F_a)$ при гомоморфизме τ.

Продемонстрируем эффекты, которые нужно иметь в виду при изучении квадратурных функций как функций комплексного переменного.

Пример. Рассмотрим функцию $w(z) = \ln(1 - z^{\alpha})$, где $\alpha > 0$ – иррациональное число. Функция w – элементарная функция, заданная простейшей формулой. Тем не менее ее риманова поверхность весьма сложно расположена над комплексной плоскостью. Множество A особых точек этой функции состоит из точек $0, \infty$ и точек логарифмического ветвления $a_k = e^{\frac{1}{\alpha}2k\pi i}$, где k – любое целое число. Так как α иррационально, точки a_k будут всюду плотно расположены на единичной окружности. Несложно показать, что фундаментальная группа $\pi(S^2 \setminus A)$ и группа монодромии функции w будут континуальны. Можно показать также, что образ фундаментальной группы $\pi_1(S^2 \setminus \{A \bigcup b\})$ дополнения до множества $A \bigcup b$, где $b \neq a_k$ – любая точка на единичной окружности, при гомоморфизме τ является собственной подгруппой группы монодромии функции w. (То обстоятельство, что удаление одной лишней точки может изменить группу монодромии, существенно осложняет все доказательства.)

7. Препятствия к представимости функций в квадратурах

Справедлива следующая

Теорема ([6], [8], [10]). *Класс всех* S*-функций, имеющих разрешимую группу монодромии, замкнут относительно суперпозиций, мероморфных операций, операций дифференцирования и интегрирования.*

В качестве следствия получаем следующий

Результат о квадратурах. *Группа монодромии функции* f*, представимой в квадратурах, разрешима. Более того, разрешима группа монодромии всякой функции* f*, представимой через однозначные* S*-функции при помощи суперпозиций, мероморфных операций, операций дифференцирования и интегрирования.*

Остановимся на применении этого результата к алгебре.

8. Разрешимость алгебраических уравнений

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$y^n + r_1 y^{n-1} + \cdots + r_n = 0, \quad (4)$$

в котором r_i – рациональные функции комплексного переменного x.

В окрестности неособой точки x_0 существуют все решения $y_1, \ldots, y_n$ уравнения (4). В этой окрестности можно рассмотреть поле функций $\mathfrak{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, полученное присоединением к полю рациональных функций $\mathfrak{R}$ всех решений y_i.

Рассмотрим автоморфизм σ поля $\mathfrak{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, который оставляет неподвижными все элементы поля $\mathfrak{R}$. Совокупность всех таких автоморфизмов образует группу, которая называется группой Галуа уравнения (4). Каждый автоморфизм σ из группы Галуа переводит решение уравнения в решение уравнения, поэтому ему отвечает перестановка S_σ решений. Автоморфизм σ вполне определяется перестановкой S_σ, так как поле $\mathfrak{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$ порождается функциями y_i. Вообще говоря, не каждая перестановка решений может быть продолжена до автоморфизма σ из группы Галуа. Дело в том, что автоморфизмы σ обязаны сохранять все соотношения, существующие между решениями.

Итак, группа Галуа уравнения – это группа перестановок решений, сохраняющих все соотношения между решениями.

Каждую перестановку S_γ множества решений из группы монодромии можно продолжить до автоморфизма всего поля $\Re\{y_1,\dots,y_n\}$. Действительно, вместе с функциями $y_1,\dots,y_n$ вдоль кривой γ будет мероморфно продолжаться каждый элемент поля $\Re\{y_1,\dots,y_n\}$. Это продолжение и дает требуемый автоморфизм, так как при продолжении сохраняются арифметические операции, а рациональные функции возвращаются к своему прежнему значению из-за однозначности.

Итак, группа монодромии уравнения лежит в группе Галуа. На самом деле, группа Галуа совпадает с группой монодромии. Действительно, неподвижные относительно действия монодромии функции из поля $\Re\{y_1,\dots,y_n\}$ будут однозначными функциями. Эти функции к тому же являются алгебраическими, а всякая однозначная алгебраическая функция рациональна. Поэтому группа монодромии и группа Галуа имеют одинаковое поле инвариантов, и следовательно, они согласно теории Галуа совпадают.

Согласно теории Галуа уравнение (4) решается в радикалах над полем рациональных функций, если и только если его группа Галуа над этим полем разрешима. Другими словами, теория Галуа доказывает следующее.

1) *Алгебраическая функция y, у которой группа монодромии разрешима, представима в радикалах.*
2) *Алгебраическая функция y, у которой группа монодромии не разрешима, не представима в радикалах.*

Наша теорема позволяет усилить отрицательный результат 2). *Алгебраическая функция y, у которой группа монодромии неразрешима, не выражается через однозначные S-функции с помощью мероморфных операций, суперпозиций, интегрирования и дифференцирования.* Если алгебраическое уравнение не решается в радикалах, то его нельзя решить и используя логарифмы, а также экспоненты и другие мероморфные функции на комплексной плоскости. Более сильный вариант этого утверждения можно найти в п. 15.

9. Монодромная пара

Группа монодромии – это не только абстрактная группа, но группа транзитивных перестановок листов функции. Алгебраически такой объект задается парой групп: группой перестановок и ее подгруппой, являющейся стационарной подгруппой некоторого элемента.

Монодоромной парой S-функции называется пара групп, состоящая из группы монодромии этой функции и стационарной подгруппы некоторого листа этой функции. Монодромная пара определена корректно, т.е. с точностью до изоморфизма пар групп не зависит от выбора листа функции.

Нам понадобится следующее определение. Пара групп $[\Gamma,\Gamma_0]$ называется *почти разрешимой парой групп*, если существует цепочка подгрупп

$$\Gamma=\Gamma_1\subseteq\ldots\subseteq\Gamma_m\supseteq\Gamma_0$$

такая, что для каждого i, $1 \le i \le m-1$ группа Γ_{i+1} является нормальным делителем группы Γ_i и фактор-группа Γ_i / Γ_{i+1} либо коммутативна, либо конечна.

Любую группу Γ можно рассматривать как пару групп $[\Gamma, e]$, где e – единичная подгруппа. Будем говорить, что группа Γ разрешима, если почти разрешима пара групп $[\Gamma, e]$.

Теорема ([6], [8], [10]). *Класс всех* S*-функций, имеющих почти разрешимую монодромную пару, замкнут относительно суперпозиций, мероморфных операций, операций дифференцирования, интегрирования и решения алгебраических уравнений.*

В качестве следствия получаем следующий

Результат об обобщенных квадратурах. *Монодромная пара функции* f*, представимой в обобщенных квадратурах, почти разрешима. Более того, почти разрешима монодромная пара всякой функции* f*, представимой через однозначные* S*-функции при помощи суперпозиций, мероморфных операций, дифференцирования, интегрирования и решения алгебраических уравнений.*

Приведем теперь примеры функций, не представимых в обобщенных квадратурах. Пусть риманова поверхность функции f является универсальной накрывающей над областью $S^2 \setminus A$, где S^2 – сфера Римана и A – конечное множество, содержащее не менее трех точек. *Тогда функция* f *не выражается через однозначные* S*-функции при помощи обобщенных квадратур, суперпозиций и мероморфных операций.* Действительно, монодромная пара такой функции состоит из свободной некоммутативной группы и ее единичной подгруппы. Легко видеть, что такая пара групп не является почти разрешимой.

Пример. Рассмотрим функцию z, конформно отображающую верхнюю полуплоскость на треугольник с нулевыми углами, ограниченный дугами окружностей. Функция z обратна к модулярной функции Пикара. Риманова поверхность функции z является универсальной накрывающей над сферой без трех точек, поэтому функция z не выражается через однозначные S-функции при помощи обобщенных квадратур, суперпозиций и мероморфных операций.

Отметим, что функция z тесно связана с эллиптическими интегралами

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}} \text{ и } K'(k) = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}}.$$

Каждые две из функций $K(k)$, $K'(k)$ и $z(w)$ взаимно выражаются друг через друга при помощи квадратур. Поэтому каждый из интегралов $K(k)$ и $K'(k)$ не выражается через однозначные S-функции при помощи обобщенных квадратур, суперпозиций и мероморфных операций.

В следующем параграфе мы обобщим этот пример 1 и перечислим все многоугольники, ограниченные дугами окружностей, на которые можно отобразить верхнюю полуплоскость функцией, представимой в обобщенных квадратурах.

10. Отображение полуплоскости на многоугольник, ограниченный дугами окружностей

10.1. Применение принципа симметрии. Рассмотрим на комплексной плоскости многоугольник G, ограниченный дугами окружностей. Согласно теореме Римана существует функция f_G, отображающая верхнюю полуплоскость на многоугольник G. Это отображение изучалось Риманом, Шварцем, ристоффелем, Клейном и другими (см., например [11]). Напомним нужные нам классические результаты.

Обозначим через $B=\{b_j\}$ прообраз множества вершин многоугольника G при отображении f_G, через $H(G)$ – группу конформных преобразований сферы, порожденную инверсиями относительно сторон многоугольника, и через $L(G)$ – подгруппу индекса 2 группы $H(G)$, состоящую из дробно-линейных преобразований. Из принципа симметрии Римана-Аварца вытекает следующее утверждение.

Утверждение.

1) *Функция f_G мероморфно продолжается вдоль всех кривых, не пересекающих множество B.*

2) *Все ростки многозначной функции f_G в неособой точке $a\notin B$ получаются применением к фиксированному ростку f_a группы дробно-линейных преобразований $L(G)$.*

3) *Группа монодромии функции f_G изоморфна группе $L(G)$.*

4) *Около точек b_j функция f_G имеет особенности следующего вида. Если в вершине a_j многоугольника G, соответствующей точке b_j, угол равен $\alpha_j\neq 0$, то функция f_G дробно-линейным преобразованием приводится к виду $f_G(z)=(z-b_j)^{\beta_j}\varphi(z)$, где $\beta_j=\alpha_j/2\pi$, а функция φ голоморфная около точки b_j. Если же угол $\alpha_j=0$, то функция f_G дробно-линейным преобразованием приводится к виду $f_G(z)=\ln(z)+\varphi(z)$, где функция φ голоморфна около b_j.*

Из наших результатов вытекает, что если функция f_G представима в обобщенных квадратурах, то группа $L(G)$ и вместе с ней группа $H(G)$ почти разрешимы.

10.2. Почти разрешимые группы дробно-линейных и конформных преобразований. Пусть π – эпиморфизм группы $SL(2)$ матриц 2-го порядка с определителем 1 в группу дробно-линейных преобразований L,

$$\pi:\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \frac{az+b}{cz+d}.$$

Так как $\ker\pi = \mathbf{Z}_2$, группа $\tilde{L} \subseteq L$ и группа $\pi^{-1}(\tilde{L}) = \Gamma \subseteq SL(2)$ почти разрешимы одновременно. Группа Γ – матричная группа, поэтому группа Γ *почти разрешима, если и толь ко если она обладает нормальным делителем* Γ_0 *конечного индекса, приводящимся к треугольному виду*. (Этот вариант теоремы Ли верен и в многомерном пространстве и играет важную роль в дифференциальной теории Галуа.) Группа Γ_0 состоит из матриц второго порядка, поэтому группа Γ_0 приводится к треугольному виду в одном из следующих трех случаев:

1) группа Γ_0 имеет единственное собственное одномерное подпространство;
2) группа Γ_0 имеет два собственных одномерных подпространства;
3) группа Γ_0 имеет двумерное собственное пространство.

Перейдем теперь к группе дробно-линейных преобразований $\tilde{L} = \pi(\Gamma)$. Группа $\tilde{L}$ дробно-линейных преобразований почти разрешима, если и только если она обладает нормальным делителем $L_0 = \pi(\Gamma_0)$ конечного индекса, множество неподвижных точек которого состоит из одной точки, или из двух, или из всей сферы Римана.

Группа конформных преобразований $\tilde{H}$ обладает подгруппой $\tilde{L}$ индекса 2 (или индекса 1), состоящей из дробно-линейных преобразований. Поэтому для почти разрешимой группы конформных преобразований $\tilde{H}$ справедливо аналогичное утверждение.

Лемма. *Группа конформных преобразований сферы почти разрешима, если и только если выполнено хотя бы одно из трех условий:*

1) группа имеет неподвижную точку;
2) группа имеет инвариантное множество, состоящее из двух точек;
3) группа конечна.

Лемма вытекает из предыдущего, т.к. множество неподвижных точек нормального делителя инвариантно относительно действия группы. Хорошо известно, что *конечная группа* $\tilde{L}$ *дробно-линейных преобразований сферы дробно-линейной заменой координаты приводится к группе вращений.*

Несложно показать, что если произведению инверсии относительно двух разных окружностей при стереографической проекции соответствует вращение сферы, то этим окружностям соответствуют большие круги. Поэтому каждая *конечная группа* $\tilde{H}$ *конформных преобразований, порожденная инверсиями относительно окружностей, дробно-линейной заменой координаты приводится к группе движений сферы, порожденной отражениями*.

Хорошо известны все конечные группы движений, порожденные отражениями. Каждая такая группа есть группа движений одного из следующих тел:

1) правильной *n*-угольной пирамиды;
2) *n*-угольного диэдра, или тела, образованного двумя равными правильными *n*-угольными пирамидами, склееными по общему основанию;
3) тетраэдра;
4) куба или октаэдра;
5) додекаэдра или икосаэдра.

Все эти группы движений, за исключением группы додекаэдра-икосаэдра, разрешимы. На сфере, центр которой совпадает с центром тяжести тела, плоскости симметрии тела высекают некоторую сетку больших кругов. Сетки, соответствующие перечисленным телам, будем называть конечными сетками больших кругов. Стереографические проекции конечных сеток изображены на рис. 1-5. }

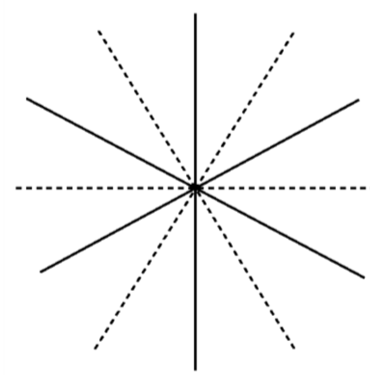

Рис. 1. Сетка n-угольной пирамиды (*n*=6)

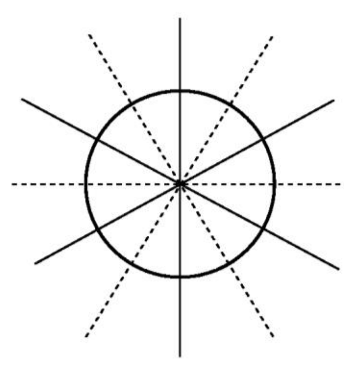

Рис. 2. Сетка n-угольного диедра (*n*=6)

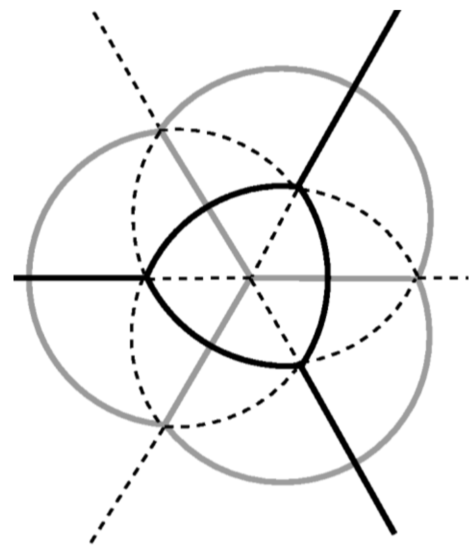

Рис. 3. Сетка тетраэдра

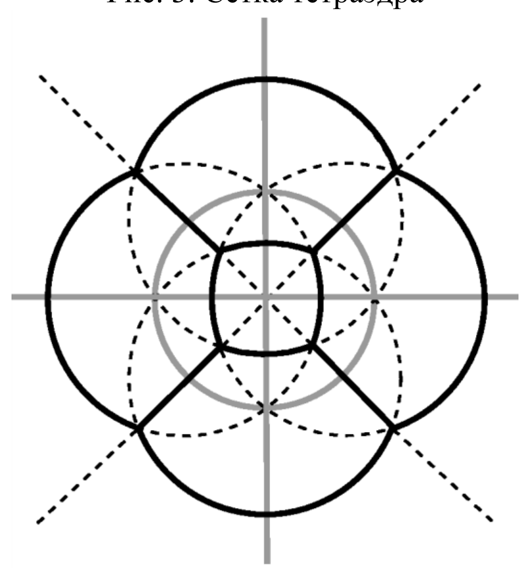

Рис. 4. Сетка куба-октаэдра

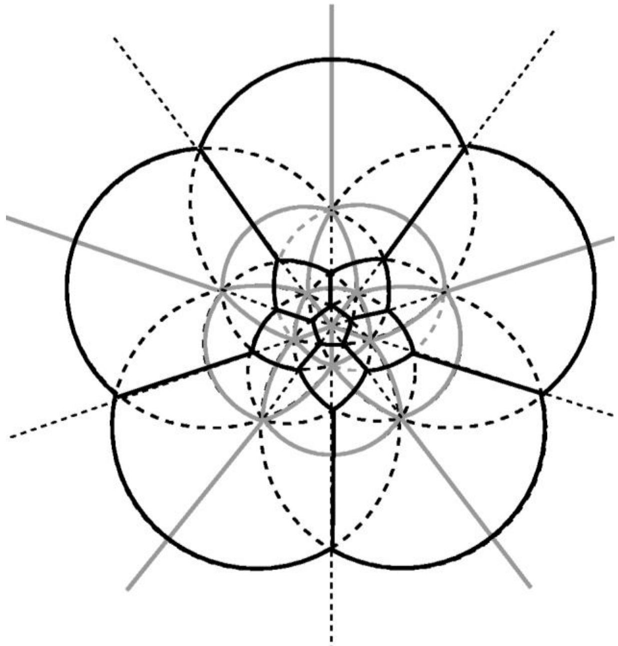

Рис. 5. Сетка икосаэдра-додекаэдра

10.3. Интегрируемые случаи. Вернемся к вопросу о представимости функции f_G в обобщенных квадратурах.

Рассмотрим возникающие случаи и покажем, что найденное условие на группу монодромии не только необходимо, но и достаточно для представимости функции f_G в обобщенных квадратурах.

Первый случай интегрируемости. Группа $H(G)$ имеет неподвижную точку. Это означает, что продолжения сторон многоугольника G пересекаются в одной точке. Переводя эту точку дробно-линейным преобразованием в бесконечность, получим многоугольник $\overline{G}$, ограниченный отрезками прямых (см. рис. 6).

Все преобразования группы $L(\overline{G})$ имеют вид $z \to az + b$. Все ростки функции $\overline{f} = f_{\overline{G}}$ в неособой точке c получаются применением к фиксированному ростку $\overline{f}_c$ группы $L(\overline{G})$, $\overline{f}_c \to a\overline{f}_c + b$. Росток $R_c = \overline{f}_c'' / \overline{f}_c'$ инвариантен при действии группы $L(\overline{G})$. Значит, росток R_c есть росток однозначной функции. Особые точки b_j функции R_c могут быть лишь полюсами (см. утверждение из п. 10.1). Поэтому функция R_c рациональна. Уравнение $\overline{f}_c'' / \overline{f}_c' = R$ интегрируется в квадратурах. Этот случай интегрируемости хорошо известен. Функция $\overline{f}$ в этом случае называется интегралом Кристоффеля-Шварца.

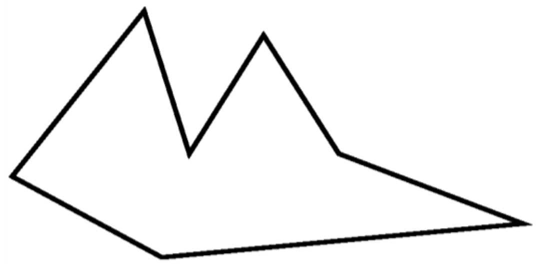

Рис. 6. Первый случай интегрируемости

Второй случай интегрируемости. Группа $H(G)$ имеет инвариантное множество, состоящее из двух точек. Это означает существование таких двух точек, что для каждой стороны многоугольника G точки или инверсионны относительно стороны, или лежат на ее продолжении. Переведем эти точки дробно-линейным преобразованием в нуль и в бесконечность. Мы получим многоугольник $\overline{G}$, ограниченный дугами окружностей с центрами в точке 0 и отрезками лучей, выходящих из точки 0 (см. рис. 7). Все преобразования группы $L\left(\overline{G}\right)$ имеют вид $z \to az$, $z \to \frac{b}{z}$. Все ростки функции $\overline{f} = f_{\overline{G}}$ в неособой точке c получается применением к фиксированному ростку $\overline{f}_c$ преобразований группы $L\left(\overline{G}\right)$

$$\overline{f}_c \to a\overline{f}_c \quad \overline{f}_c \to b\overline{f}_c.$$

Росток $R_c = \left(\overline{f}_c'' / \overline{f}_c'\right)^2$ инвариантен при действии группы $L\left(\overline{G}\right)$ и является ростком однозначной функции R. Особенности функции R могут быть лишь полюсами (см. утверждение из п. 10.1), поэтому функция R рациональна. Уравнение $R = \overline{f}' / \overline{f}$ интегрируется в квадратурах.

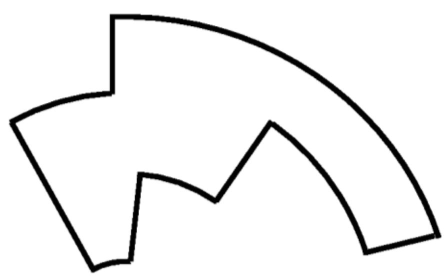

Рис. 7. Второй случай интегрируемости

Третий случай интегрируемости. Группа $H(G)$ конечна. Это означает, что многоугольник G дробно-линейным преобразованием переводятся в многоугольник $\overline{G}$, стороны которого лежат на некоторой конечной сетке больших кругов (см. рис. 1-5). Группа $L(G)$ конечна, и, следовательно, функция f_G конечнозначна. Так как все особенности функции f_G степенного типа (см. утверждение из п. 10.1), то функция f_G есть алгебраическая функция.

Остановимся на случае конечной разрешимой группы $H(G)$. Такой случай представляется, если и только если многоугольник G дробно-линейным преобразованием переводится в многоугольник $\overline{G}$, стороны которого лежат на конечной сетке, отличной от сетки додекаэдра-икосаэдра. В этом случае группа $L(G)$ разрешима, и функция f_G представляется через рациональные функции при помощи арифметических операций и радикалов (см. п. 8).

Из наших результатов вытекает

Теорема о многоугольниках, ограниченных дугами окружностей ([6], [8], [10]). *Для любого многоугольника G, не содержащегося в перечисленных выше трех случаях интегрируемости, функция f_G не только не представима в обобщенных квадратурах, но и не выражается через однозначные* S *-функции при помощи обобщенных квадратур, суперпозиций и мероморфных операций*.

11. Топологические препятствия к разрешимости линейных дифференциальных уравнений

11.1. Группа монодромии линейного дифференциального уравнения, ее связь с группой Галуа. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}+r_1 y^{(n-1)}+\cdots+r_n y=0, \qquad (5)$$

где r_i – рациональные функции комплексного переменного x. Полюса рациональных функций r_i и точка ∞ называются особыми точками уравнения (5).

В окрестности неособой точки x_0 решения уравнения образуют n-мерное пространство V^n. Возьмем теперь произвольную кривую $\gamma(t)$ на комплексной плоскости, ведущую из точки x_0 в точку x_1 и не проходящую через особые точки a_i. Решения уравнения будут аналитически продолжаться вдоль кривой, оставаясь при этом решениями уравнения. Поэтому каждой кривой γ отвечает линейное отображение M_γ пространства решений ${V^n}_{x_0}$ в точке x_0 в пространство решений ${V^n}_{x_1}$ в точке x_1.

Если пошевелить кривую γ, не задевая при этом особых точек и оставляя закрепленными концы, то отображение M_γ меняться не будет. Замкнутым кривым будет отвечать линейное преобразование пространства V^n в себя. Совокупность всех таких линейных преобразований пространства V^n образует группу, которая и называется группой *монодромии уравнения* (5). Итак, группа монодромии уравнения – это группа линейных преобразований решений, которые возникают при обходе особых точек. Группа монодромии уравнения характеризует многозначность его решений.

В окрестности неособой точки x_0 существуют n линейнонезависимых решений $y_1,\ldots,y_n$ уравнения (5). В этой окрестности можно рассмотреть поле функций $\Re\{y_1,\ldots,y_n\}$, полученное присоединением к полю рациональ ных функций $\Re$ всех решений y_i и всех их производных.

Каждое преобразование M_γ пространства решений из группы монодромии можно продолжить до автоморфизма всего поля $\Re\{y_1,\ldots,y_n\}$. Действительно, вместе с функциями $y_1,\ldots,y_n$ вдоль кривой γ будет мероморфно продолжаться каждый элемент поля $\Re\{y_1,\ldots,y_n\}$. Это продолжение и дает требуемый автоморфизм, так как при продолжении сохраняются арифметические операции и дифференцирование, а рациональные функции возвращаются к своему прежнему значению из-за однозначности.

Итак, *группа монодромии уравнения лежит в группе Галуа*.

Поле инвариантов группы монодромии – это подполе поля $\Re\{y_1,\ldots,y_n\}$, состоящее из однозначных функций. В отличии от алгебраических уравнений для дифференциальных уравнений поле инвариантов относительно действия группы монодромии может быть больше чем поле рациональных функций.

Например, для дифференциального уравнения (5), у которого все коэффициенты $r_i(x)$ являются полиномами, все решения однозначны. Но, конечно, решения таких уравнений далеко не всегда полиномиальны. Дело здесь в том, что решения дифференциальных уравнений могут расти при подходе к особым точкам экспоненциальным образом. Известен широкий класс линейных дифференциальных уравнений, для которых такого осложнения нет, т.е. для которых решения при подходе к каждой особой точке растут не быстрее чем степенным образом. Дифференциальные уравнения, обладающие этим свойством, называются дифференциальными уравнениями типа Фукса.

Для дифференциальных уравнений типа Фукса справедлива следующая теорема Фробениуса.

Теорема 1. *Подполе дифференциального поля $\Re\{y_1,\ldots,y_n\}$, состоящее из однозначных функций, для дифференциальных уравнений типа Фукса совпадает с полем рациональных функций*.

Согласно дифференциальной теории Галуа из теоремы Фробениуса вытекает, что алгебраическое замыкание группы монодромии M (т.е. наименьшая алгебраическая группа, содержащая M) совпадает с ее группой Галуа.

Дифференциальная теория Галуа поэтому дает следующие критерии разрешимости дифференциальных уравнений типа Фукса.

Теорема 2. *Дифференциальное уравнение типа Фукса решается в квадратурах и в обобщенных квадратурах, если его группа монодромии, соответственно, разрешима и почти разрешима.*

Дифференциальная теория Галуа доказывает тем самым два результата.

1) *Если группа монодромии дифференциального уравнения типа Фукса разрешима (почти разрешима), то это уравнение решается в квадратурах (в обобщенных квадратурах).*
2) *Если группа монодромии дифференциального уравнения типа Фукса неразрешима (не почти разрешима), то это уравнение не решается в квадратурах (в обобщенных квадратурах).*

Наша теорема позволяет усилить отрицательный результат 2). Действительно, легко видеть, что для почти каждого решения дифференциального уравнения (5) его монодромная пара есть $[M,e]$, где M – группа монодромии уравнения, а e – ее тривиальная подгруппа. Поэтому справедлива следующая

Теорема 3 ([6], [8]). *Если группа монодромии линейного дифференциального уравнения (5) неразрешима (не почти разрешима), то почти каждое решение этого уравнения нельзя выразить через однозначные* S*-функции при помощи суперпозиций, мероморфных операций, интегрирований и дифференцирований (при помощи суперпозиций, мероморфных операций, интегрирований, дифференцирований и решения алгебраических уравнений).*

Является ли группа монодромии заданного линейного дифференциального уравнения разрешимой (почти разрешимой)? Этот вопрос оказывается очень сложным. Однако, существует интересный пример, в котором ответ на этот вопрос очень прост.

11.2. Системы фуксовых дифференциальных уравнений с малыми коэффициентами. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений типа Фукса, т.е. систему вида

$$y' = Ay \quad (6)$$

где $y = y_1,\ldots,y_n$ – неизвестная векторфункция, а A – $n\times n$ матрица, состоящая из рациональных функций комплексного переменного x, имеющая следующий вид

$$A(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{x-a_i}$$

где A_i – постоянные матрицы.

Если матрицы A_i одновременно приводятся к треугольному виду, то система (6), как и всякая треугольная система, решается в квадратурах. Разумеется, встречаются разрешимые не треугольные системы. Однако, если матрица A_i достаточно мала, таких систем нет. Именно, справедлива следующая

Теорема 4 ([9]). *Нетреугольная система (6) с достаточно малыми матрицами* A_i, $\|A_i\| < \varepsilon(a_1,\ldots,a_k,n)$ *сильно неразрешима, т.е. ее нельзя разрешить даже если использовать все однозначные* S *-функции, суперпозиции, мероморфные операции, интегрирование, дифференцирование и решение алгебраических уравнений.*

Доказательство этой теоремы использует теорию Лаппо-Данилевского [12].

12. Алгебраические функции нескольких переменных

До сих пор мы имели дело с функциями одной переменной. Здесь мы сделаем два замечания о функциях нескольких переменных, доказательства которых не требуют новых соображений и проводятся тем же методом, что и для функции одной переменной.

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$y^n + r_1 y^{n-1} + \cdots + r_n = 0, \qquad (7)$$

в котором r_i – рациональные функции от k комплексных переменных $x_1,\ldots,x_k$.

1) Согласно теории Галуа уравнение (7) с разрешимой группой монодромии решается в радикалах. *Если же группа монодромии уравнения (7) неразрешима, то его не только нельзя решить в радикалах, но оно не решается и с использованием радикалов целых функций многих переменных, арифметических операций и суперпозиций*. Это утверждение можно рассматривать как вариант теоремы Абеля о неразрешимости алгебраических уравнений степени большей четырех. Более сильный вариант этой теоремы можно найти в п. 15.

2) Уравнение (7) определяет алгебраическую функцию от k переменных. Когда можно алгебраическую функцию от k переменных представить через алгебраические функции меньшего числа переменных, используя суперпозиции и арифметические операции? Этот вопрос составляет содержание тринадцатой проблемы Гильберта. Несмотря на замечательные достижения в этой области [13], до сих пор не доказано, что существуют алгебраические функции нескольких переменных, не представимые через алгебраические функции одной переменной.

Известна, однако, следующая

Теорема ([4], [5]). *Целая алгебраическая функция* y *двух переменных* (a,b), *определенная равенством*

$$y^5 + ay + b = 0$$

не выражается через целые алгебраические функции одной переменной при помощи суперпозиций, сложений и умножений.

Дело здесь в следующем. С каждой особой точкой p алгебраической функции можно связать *локальную группу монодромии*, т.е. группу перестановок листов, которые получаются при обходах множества особенностей функции вдоль кривых, лежащих в как угодно малой окрестности точки p. Для алгебраических функций одной переменной такая локальная группа монодромии является коммутативной. Поэтому локальная группа монодромии алгебраической функции, выражающейся через целые алгебраические функции одной переменной при помощи сложений и умножений, *должна быть разрешимой*. А локальная группа монодромии функции $y^5+ay+b=0$ около точки (0,0) является неразрешимой группой $S(5)$ всех перестановок пяти элементов. Это и объясняет сформулированную теорему.

Отметим, что использование операции деления абсолютно разрушает приведенные аргументы. Действительно, деление – разрывная операция, и ее применение нарушает локальность. Кстати, функция $y^5+ay+b=0$ выражается с помощью деления через функцию $g(x)$ одной переменной, определенную равенством $g^5+g+x=0$ и через функцию одной переменной $f(a)=\sqrt[4]{a^5}$. Несложно видеть, что $y(a,b)=g\left(b/\sqrt[4]{a^5}\right)\sqrt[4]{a}$.

Замечание. Доказательство последней теоремы составляет содержание курсовой работы, выполненной мною в 1968 году. Позже я узнал, что мой научный руководитель В.И. Арнольд не только знал, как решать поставленную задачу, но даже читал лекции на близкую тему в Колмогоровском интернате. По материалам его лекций позднее была написана книга [14].

13. Функции многих комплексных переменных, представимые в квадратурах и в обобщенных квадратурах

Многомерный случай сложнее одномерного. Нам придется пересмотреть основные определения и, в частности, чуть изменить определения представимости функции в квадратурах и обобщенных квадратурах. В этом параграфе мы обсудим новую постановку вопроса.

Пусть фиксирован класс основных функций и запас допустимых операций. Выражается ли заданная функция (являющаяся, скажем, решением данного алгебраического или дифференциального уравнения или возникшая из каких-либо других соображений) через основные функции с помощью допустимых операций? По-прежнему, мы будем интересоваться именно этим вопросом, но будем вкладывать в него немного другой смысл. Нас будут интересовать различные *однозначные ветви* многозначных функций над различными областями. Каждую функцию, даже если она является многозначной функцией, мы будем рассматривать как совокупность всех ее однозначных ветвей. Мы будем применять допустимые операции (такие как арифметические операции или операция взятия суперпозиций) лишь к однозначным ветвям функций над различными областями. Так как мы имеем дело с аналитическими функциями, то в качестве областей достаточно рассматривать лишь малые окрестности точек. Вопрос теперь видоизменяется следующим образом: *выражается ли заданный росток функции в заданной точке через ростки основных функций при помощи допустимых операций?* Конечно, ответ теперь зависит от выбора точки и от выбора однозначного ростка в этой точке заданной многозначной функции. Однако оказывается, что (для интересующих нас классов основных функций) либо искомого выражения не существует ни для какого ростка заданной многозначной функции ни в какой точке, либо, наоборот, в некотором смысле одно и то же представление будет обслуживать все ростки заданной многозначной функции почти в любой точке пространства. В первом случае мы будем говорить, что *никакая ветвь заданной многозначной функции не выражается через ветви основных функций при помощи допустимых операций*. Во втором случае мы будем говорить, что такое выражение *существует*.

Прежде чем двигаться дальше, отметим разницу между этой постановкой задачи и постановкой задачи, которую мы встречали в п. 1. *Для аналитической функции одной переменной среди допустимых операций, по существу, фигурировала операция аналитического продолжения.*

Действительно, рассмотрим следующий пример. Пусть f_1 – аналитическая функция, определенная в области U комплексной прямой $\mathbb{C}^1$, не продолжающаяся аналитически за пределы области U, и пусть f_2 – аналитическая функция в области U, определенная равенством $f_2 = f_1$. Согласно определению из п. 1 функция, тождественно равная нулю, представима в виде $f_2 + f_1$ *на всей комплексной прямой*. Согласно общепринятой точке зрения, равенство $f_2 + f_1 = 0$ справедливо только в области U, но не вне ее. Раньше мы не настаивали на существовании *единой области*, в которой все нужные действия производились бы над однозначными ветвями многозначных функций. Одна операция могла производиться в одной области, а другая операция – в другой области над аналитическими продолжениями полученных функций. Для S-функции одной переменной удавалось получить топологические ограничения даже и при таком, расширенном, понимании операций над многозначными аналитическими функциями. Для функций многих переменных в столь расширенной формулировке это сделать не удается и приходится принять более ограничительную формулировку, которая, впрочем, не менее (а может быть, даже более) естественна.

Перейдем к точным определениям. Фиксируем стандартное пространство $\mathbb{C}^n$ вместе с системой координат $x_1, \dots, x_n$.

Определение.

1) *Росток функции* φ в точке $a \in \mathbb{C}^n$ *выражается через ростки функций* $f_1, \dots, f_n$ *в точке* a *при помощи операции интегрирования*, если выполняется тождество $d\varphi = \alpha$, где $\alpha = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$. Для заданных ростков $f_1, \dots, f_n$ росток φ существует, если и только если 1-форма α замкнута. При этом росток φ определен с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

2) *Росток функции* φ в точке $a \in \mathbb{C}^n$ *выражается через ростки функций* $f_1, \dots, f_n$ в точке a *при помощи операции взятия экспоненты интеграла*, если выполняется тождество $d\varphi = \alpha\varphi$, где $\alpha = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$. Для заданных ростков $f_1, \dots, f_n$ росток φ существует, если и только если 1-форма α замкнута. При этом росток φ определен с точностью до произвольной мультипликативной постоянной.

3) *Росток функции* y в точке $a \in \mathbb{C}^n$ *выражается через ростки функции* $f_0, \ldots, f_k$ *в точке* a *при помощи операции решения алгебраического уравнения*, если росток f_0 не обращается в тождественный нуль и выполняется тождество $f_0 y^k + f_1 y^{k-1} + \cdots + f_k = 0$.

Определение

1) *Класс ростков функций* в $\mathbb{C}^n$, *представимых в квадратурах* (над полем констант) определяется следующим набором данных. Список ростков основных функций: ростки постоянных функций (в любой точке пространства $\mathbb{C}^n$). Список допустимых операций: арифметические операции, операция интегрирования, операция взятия экспоненты интеграла.

2) *Класс ростков функций* в $\mathbb{C}^n$, *представимых в обобщенных квадратурах* (над полем констант) определяется следующим набором данных. Список ростков основных функций: ростки постоянных функций (в любой точке пространства $\mathbb{C}^n$). Список допустимых операций: арифметические операции, операция интегрирования, операция взятия экспоненты интеграла и операция решения алгебраических уравнений.

Отметим, что приведенные выше определения почти дословно переносятся на случай абстрактных дифференциальных полей, снабженных n коммутирующими операциями дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. В таком обобщенном виде эти определения принадлежат Колчину.

Рассмотрим теперь классы ростков функций, представимых в квадратурах и обобщенных квадратурах в пространствах $\mathbb{C}^n$ любой размерности $n \geq 1$ одновременно. Повторяя рассуждения Лиувилля (см. теорему 1 из п. 2), несложно показать, что *классы ростков функций от нескольких переменных, предствимых в квадратурах и представимых в обобщенных квадратурах, содержат ростки рациональных функций от многих переменных и ростки всех основных элементарных функций и что эти классы ростков замкнуты относительно суперпозиций.* (Замкнутость, скажем, класса ростков функций, представимых в квадратурах, относительно суперпозиций означает следующее: если $f_1, \ldots, f_m$ – ростки функций, представимых в квадратурах, в точке $a \in \mathbb{C}^n$ и g – росток функции, представимой в квадратурах, в точке $b \in \mathbb{C}^m$, где $b = \left(f_1(a), \ldots, f_m(a)\right)$, то росток $g\left(f_1, \ldots, f_m\right)$ в точке $a \in \mathbb{C}^n$ является ростком функции, представимой в квадратурах.)

14. SC-ростки

Существует ли достаточно широкий класс ростков функций многих переменных (содержащий ростки функций, представимых в обобщенных квадратурах, и ростки целых функций многих переменных и замкнутый относительно естественных операций, таких как операция суперпозиций), для которых определена группа монодромии? В этом параграфе определяется класс SC-ростков и формулируется теорема о замкнутости этого класса относительно естественных операций, дающая положительный ответ на этот вопрос. Класс SC-ростков я нашел относительно недавно. До этого долгое время я считал, что ответ на поставленный вопрос отрицателен.

В случае функции одной переменной нам очень повезло с классом S-функций. Начнем с прямого обобщения класса S-функций на многомерный случай.

Подмножество $A \subset M$ в связном *к*-мерном аналитическом многообразии M назовем *тощим*, если существует счетное множество открытых областей $U_i \subset M$ и счетное множество собственных аналитических подмножеств $A_i \subset U_i$ в этих областях таких, что $A \subseteq \bigcup A_i$. Многозначную аналитическую функцию на многообразии M назовем S-*функцией*, если множество ее особых точек является тощим. Уточним это пределение.

Два регулярных ростка f_a и g_b, заданных в точках a и b многообразия M, называются *эквивалентными*, если росток g_b получается из ростка f_a регулярным продолжением вдоль некоторой кривой. Каждый росток g_b, эквивалентный ростку f_a, называется также *регулярным* ростком многозначной аналитической функции e, порожденной ростком f_a.

Точка $b \in M$ называется *особой для ростка* f_a, если существует кривая $\gamma : [0,1] \to M$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, такая, что росток не может быть регулярно продолжен вдоль этой кривой, но для любого t, $0 \le t < 1$, росток регулярно продолжается вдоль укороченной кривой $\gamma : [0,t] \to M$. Легко видеть, что у эквивалентных ростков множества особых точек совпадают. Регулярный росток называется S-*ростком*, если множество его особых точек является тощим. Многозначная аналитическая функция называется S-*функцией*, если каждый ее регулярный росток является S-ростком.

Замечание. Для функции одного комплексного переменного возникло два определения S-функции. Одно – только что приведенное, и второе – из п. 5. Эти два определения, очевидно, совпадают.

На S-функции многих переменных автоматически переносятся понятия *группы монодромии* и *понятие монодромной пары*.

Поясним, в чем именно многомерный случай сложнее одномерного.Представим себе следующую ситуацию. Пусть $f(x,y)$ – многозначная аналитическая функция двух переменных с множеством точек ветвления A, где $A \subset \mathbb{C}^2$ – аналитическая кривая на комплексной плоскости. Вполне может случиться, что в одной из точек $a \in A$ существует аналитический росток f_a многозначной аналитической функции f (по самому определению множества точек ветвления A над точкой a существуют не все ростки функции

f, но некоторые из ростков существовать могут). Пусть теперь $g_1(t)$ и $g_2(t)$ – аналитические функции комплексной переменной t, задающие отображения комплексной прямой $\mathbb{C}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}^2$ такие, что образ прямой $\mathbb{C}$ лежит в кривой A, т.е. $(g_1(t), g_2(t)) \in A$ при $t \in \mathbb{C}$. Пусть b – прообраз точки a при этом отображении, т.е. $a = (g_1(b), g_2(b))$. Что можно сказать о многозначной аналитической функции на комплексной прямой, порожденной ростком $f(g_1, g_2)$ в точке b, полученным в результате суперпозиции ростка векторфункции g_1, g_2 в точке b и ростка функции f в точке a? Ясно, что аналитические свойства этой функции существенно зависят от продолжаемости ростка f_a вдоль особой кривой A.

Ничего подобного не встречается при рассмотрении суперпозий с функцией одной переменной. Действительно, особое множество S-функции одной переменной состоит из отдельных точек. Если образ комплексного пространства при аналитическом отображении g целиком содержится в множестве особых точек функции f, то функция g является константой. Ясно, что если функция g – константа, то как бы не доопределялась функция f на своем множестве особых точек, функция $f(g)$ тоже будет константой.

В одномерном случае для наших целей достаточно исследовать характер многозначности аналитической функции только в дополнении к множеству ее особых точек. В многомерном случае для наших целей необходимо исследовать возможность продолжения ростков встречающихся функций вдоль их множества особенностей (если, конечно, росток функции определен в какой-либо точке множества особенностей). Оказывается, что ростки многозначных функций иногда автоматически продолжаются вдоль их множетва особенностей [16], что и спасает ситуацию.

Ключевую роль для дальнейшего играет следующее

Определение. Росток f_a аналитической функции в точке a пространства $\mathbb{C}^n$ является $\mathrm{S}C$*-ростком*, если выполнено следующее условие. Для всякого связного комплексно-аналитического многообразия M, всякого аналитического отображения $G : M \to \mathbb{C}^m$ и всякого прообраза c точки a, $G(c) = a$, существует тощее подмножеств $A \subset M$ такое, что для всякой кривой $\gamma : [0,1] \to M$, начинающейся в точке c, $\gamma(0) = c$, и пересекающей множество A лишь, может быть, в начальный момент, $\gamma(t \notin A)$ при $t > 0$, росток f_a аналитически продолжается вдоль кривой $G \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^n$.

Утверждение. *Если множество особых точек* S*-функций является аналитическим множеством, то каждый росток этой функции является* $\mathrm{S}C$*-ростком.*

Это утвержаение легко вытекает из статьи [16].

Очевидно, что каждый SC-росток является ростком S-функции. Поэтому для ростков SC-функций определено понятие группы монодромии и монодромной пары.

В дальнейшем нам понадобится понятие голономной системы линейных дифференциальных уравнений. Напомним, что система из N линейных дифференциальных уравнений $L_j(y)=0$, $j=1,\dots,N$,

$$L_j(y)=\sum a^j_{i_1,\dots,i_n}\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n}y}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}=0$$

на неизвестную функцию y, коэффициенты $a^j_{i_1,\dots,i_n}$ которых – аналитические функции от n комплексных переменных $x_1,\dots,x_n$, называется *голономной*, если пространство ее решений конечномерно.

Теорема о замкнутости класса SC-ростков. *Класс всех SC-ростков в $\mathbb{C}^n$ замкнут относительно следующих операций:*

1) операции дифференцирования, т.е. если f – SC-росток в точке $a\in\mathbb{C}^n$, то для каждого $i=1,\dots,n$ ростки частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ тоже являются SC-ростками в точке a;

2) *операции интегрирования, т.е. если $df=f_1dx_1+\dots+f_ndx_n$, где $f_1,\dots,f_n$ – SC-ростки в точке $a\in\mathbb{C}^n$*, то f – тоже SC-*росток в точке* a;

3) *операции суперпозиции с ростками SC-функций m переменных, т.е. если $f_1,\dots,f_m$ – SC-ростки в точке $a\in\mathbb{C}^n$* и g – SC-*росток в точке $(f_1(a),\dots,f_m(a))$ пространства $\mathbb{C}^m$*, то $g(f_1,\dots,f_m)$ – *тоже SC-росток в точке a*;

4) *операции решений алгебраических уравнений, т.е. если $f_1,\dots,f_k$ – SC-ростки в точке $a\in\mathbb{C}^n$, причем росток f_0 не равен тождественно нулю, а росток y удовлетвоеяет уравнению $f_0y^k+f_1y^{k-1}+\dots+f_k=0$, то росток y тоже является SC-ростком в точке a*;

5) *операции решения голономных систем линейных дифференциальных уравнений, т.е. если росток функции y в точке $a\in\mathbb{C}^n$ удовлетворяет голономной системе из* n *линейных дифференциальных уравнений*

$$L_j(y)=\sum a^j_{i_1,\dots,i_n}\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n}y}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}=0,$$

все коэффициенты $a^j_{i_1,\dots,i_n}$ которых являются SC-ростками в точке a, то y тоже является SC-ростком в точке a.

Следствие. *Если росток функции f можно получить из ростков S-функций, имеющих аналитические множества особых точек, с помощью интегрирования,* *дифференцирования, мероморфных операций, суперпозиций, решения алгебраических уравнений и решения голономных систем линейных дифференциальных уравнений, то росток f является $\mathrm{S}\mathcal{C}$-ростком. В частности, росток, не являющийся $\mathrm{S}\mathcal{C}$-ростком, нельзя представить в обобщенных квадратурах.*

15. Топологические препятствия к представимости функций многих комплексных переменных в квадратурах

В этом параграфе приводятся топологические препятствия к представимости функций многих комплексных переменных в квадратурах и в обобщенных квадратурах. Они абсолютно аналогичны препятствиям к представимости функций одной переменной из пп. 7-9.

Теорема 1. *Класс всех $\mathrm{S}\mathcal{C}$-ростков в $\mathbb{C}^n$, имеющих разрешимую группу монодромии, замкнут относительно операций интегрирования и дифференцирования. Кроме того, этот класс замкнут относительно суперпозиций с $\mathrm{S}\mathcal{C}$-ростками от m переменных, где $m \geq 1$, имеющими разрешимую группу монодромии.*

Результат о квадратурах. *Группа монодромии ростка функции f, представимой в квадратурах, разрешима. Более того, разрешима группа монодромии всякого ростка функции f, представимого через ростки однозначных S-функций, имеющих аналитические множества особых точек, при помощи интегриерований, дифференцирований и суперпозиций.*

Следствие. *Если группа монодромии алгебраического уравнения*

$$y^k + r_1 y^{k-1} + \cdots + r_k = 0,$$

в котором r_i – рациональные функции от n переменных, неразрешима, то никакой росток его решения не только нельзя выразить в радикалах, но его нельзя представить через ростки однозначных S-функций, имеющих аналитические множества особых точек, при помощи интегрирований, дифференцирований и суперпозиций.

Это следствие представляет собой наиболее сильный многомерный вариант теоремы Абеля.

Теорема 2. *Класс всех $\mathrm{S}\mathcal{C}$-ростков в $\mathbb{C}^n$, имеющих почти разрешимую монодромую пару, замкнут относительно операций интегрирования, дифференцирования и решения алгебраических уравнений. Кроме того, этот класс замкнут относительно суперпозиций с $\mathrm{S}\mathcal{C}$-ростками от m переменных, где $m \geq 1$, имеющими почти разрешимую монодромную пару.*

Результат об обобщенных квадратурах. *Монодромная пара ростка функции f, представимой в обобщенных квадратурах, почти разрешима. Более того,* *почти разрешима монодромая пара всякого ростка функции* f*, представимого через ростки однозначных* S*-функций, имеющих аналитические множества особых точек, при помощи интегриерований, дифференцирований, суперпозиций и решения алгебраических уравнений.*

16. Топологические препятствия к разрешимости голономных систем линейных дифференциальных уравнений

16.1. Группа монодромии голономной системы линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим голономную систему из N линейных дифференциальных уравнений $L_j(y)=0$, $j=1,\dots,N$,

$$L_j(y)=\sum a^j_{i_1,\dots,i_n}\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n}y}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}=0,$$

на неизвестную функцию y, коэффициенты $a^j_{i_1,\dots,i_n}$ которой –рациональные функции от *n* комплексных переменных $x_1,\dots,x_n$.

Как известно, существует особая алгебраическая гиперповерхность Σ для голономной системы в пространстве $\mathbb{C}^n$, обладающая следующим свойством. Каждое решение системы аналитически продолжается вдоль любой кривой, не пересекающей гиперповерхности Σ. Пусть B – конечномерное пространство решений голономной системы в окрестности точки x_0, не лежащей на гиперповерхности Σ. Возьмем произвольную кривую $\gamma(t)$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ с началом и концом в точке x_0, не проходящую через гиперповерхность Σ. Решения системы будут аналитически продолжаться вдоль кривой γ, оставаясь при этом решениями системы. Поэтому каждой такой кривой γ отвечает линейное отображение M_γ пространства решений B в себя. Совокупность линейных преобразований M_γ, соответствующих всем кривым γ образуют группу, которая называется *группой монодромии голономной системы*.

Колчин обобщил теорию Пикара–Вессио на случай систем голономных дифференциальных уравнений. Приведем следствия теории Колчина, относящиеся к разрешимости в квадратурах регулярных голономных систем дифференциальных уравнений. Как и в одномерном случае, голономная система называется *регулярной*, если при подходе к особому множеству Σ и при уходе на бесконечность решения голономной системы растут не более чем степенным образом.

Теорема 1. *Регулярная голономная система линейных дифференциальных уравнений решается в квадратурах и в обобщенных квадратурах, если ее группа монодромии, соответственно, разрешима и почти разрешима.*

Теория Колчина доказывает тем самым два результата.

1) *Если группа монодромии регулярной голономной системы линейных дифференциальных уравнений разрешима (почти разрешима), то эта система уравнений решается в квадратурах (в обобщенных квадратурах).*
2) *Если группа монодромии регулярной голономной системы линейных дифференциальных уравнений неразрешима (не почти разрешима), то эта система уравнений не решается в квадратурах (в обобщенных квадратурах).*

Наша теорема позволяет усилить отрицательный результат 2).

Теорема 2. *Если группа монодромии голономной системы линейных дифференциальных уравнений неразрешима (не почти разрешима), то каждый росток почти каждого решения этой системы уравнений нельзя выразить через ростки однозначных* S*-функций, имеющих аналитические множества особых точек, при помощи суперпозиций, мероморфных операций, интегрирований и дифференцирований (при помощи суперпозиций, мероморфных операций, интегрирований, дифференцирований и решения алгебраических уравнений).*

16.2. Голономные системы линейных дифференциальных уравнений с малыми коэффициентами. Рассмотрим вполне интегрируемую систему линейных дифференциальных уравнений следующего вида

$$dy = Ay, \qquad (8)$$

где $y = y_1, \dots, y_n$ – неизвестная векторфункция, а A – $n \times n$ матрица, состоящая из дифференциальных 1-форм с рациональными коэффициентами в пространстве $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая условию полной интегрируемости $dA + A \wedge A = 0$ и имеющая следующий вид:

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i \frac{dl_i}{l_i},$$

где A_i – постоянные матрицы, а l_i – линейные неоднородные функции на $\mathbb{C}^n$.

Если матрицы A_i одновременно приводятся к треугольному виду, то система (8), как и всякая вполне интегрируемая треугольная система, решается в квадратурах. Разумеется, встречаются разрешимые не треугольные системы. Однако, если матрица A_i достаточно мала, таких систем нет. Именно, праведлива следующая

Теорема 3. *Нетреугольная вполнеинтегрируемая система (8) с достаточно малыми по модулю матрицами A_i, сильно неразрешима, т.е. ее нельзя разрешить, даже если использовать ростки всех однозначных* S*-функций, имеющих аналитические множества особых точек, суперпозиции, мероморфные операции, интегрирование, дифференцирование и решение алгебраических уравнений.*

Доказательство этой теоремы использует многомерный вариант теории Лаппо-Данилевского из статьи [12].

Литература

1. J. Ritt. *Integration in finite terms. Liouville's theory of elementary methods*. N.Y. Columbia Univ. Press. 1948.
2. Капланский И. *Введение в дифференциальную алгебру*. М.: Мир, 1959.
3. M.F. Singer. *Formal solutions of differential equations*. J. Symbolic computation, V. 10, 1990, p 59-94
4. А.Г. Хованский. *О представимости алгеброидных функций суперпозициями аналитических функций и алгеброидных функций одной переменной.* Функцион. анализ и его прил. 1970,Т. 4, вып. 2, С. 74-79.
5. А.Г. Хованский. *О суперпозициях голоморфных функций с радикалами.* УМН 1971, Т. 26, вып 2, С. 213-214.
6. А.Г. Хованский. *О представимости функций в квадратурах.* УМН 1971, Т. 26, вып. 4(160), С. 251-252.
7. А.Г. Хованский. *Римановы поверхности функций, представимых в квадратурах Тезисы Всесоюзной топологической конференции*. Тбилиси, 1972.
8. А.Г. Хованский. *О представимости функций в квадратурах*. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МИАН СССР им. В.А. Стеклова, 1973.
9. А.Г. Хованский, Ю.С. Ильяшенко. *Теория Галуа систем дифференциальных уравнений типа Фукса с малыми коэффициентами*. Препринт ИПМ АН СССР. М., 1974.
10. A. Khovanskii. *Topological obstructions for representability of functions by quadratures*. Journal of dynamical and control sistems. 1995. V. 1, N. 1, P. 99-132.
11. F. Klein. *Vorlesugen uber die hypergeometriche function.* Berlin 1933.
12. И.А. Лаппо-Данилевский. *Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: ГИТТЛ, 1957.
13. В.И. Арнольд. *О классах когомологий алгебраических функций, сохраняющихся при преобразованиях Чирнгаусена*. Функц. Анал. 1970, Т. 4, № 1, сс. 84—85.
14. В. Алексеев. *Теорема Абеля в задачах и решениях*.
15. В.П. Лексин. *О задаче Римана-Гильберта для аналитических семейств представлений.* Математические заметки, Т. 50, № 2 1991. сс. 89-97.
16. А.Г. Хованский. *О продолжаемости многозначных аналитических функций на налитическое подмножество.* Функцион. анализ и его прил., 2001. Т.35, вып.1, 62-73.
17. A. Khovanskii. *A multi-dimensional topological version of Galois theory.* Proceeding of International Conference "Monodromy in Geometry and Differential Equations", 25-30 June, Moscow 2001.
18. A. Khovanskii. *A topological version of Galois theory*. Proceeding of International Conference "Kolmogorov and Cotemporary Mathematics", 777-780, 2002.
19. А.Г. Хованский. О монодромии многозначной функции на ее множестве ветвления. Функцион. анализ и его прил., 2003. Т. 37, вып. 2, 65-74.
20. А.Г. Хованский. *Многомерные результаты о непредставимости функций в квадратурах*. Функцион. анализ и его прил., 2003, Т.37, вып. 4, 74-85.
21. A. Khovanskii. *R\'{e}solubilit\'{e} des \'{e}quations par formules explicites (th\'{e}orie de Liouville, th\'{e}orie de Galois diff\'{e}rentielle et obstructions topologiques).* In book: Alekseev. Le theoreme d'Abel : un cours d'Arnold, Vuibert, Cassini, 2004 (French translation).
22. A. Khovanskii. *Solvability of equations by explicit formulae.* In book: V.B. Alekseev. Abel's Theorem in Problems and Solutions Based on the lectures of Professor V.I.Arnold, Kluwer Academic Publishers, 2004, 221-263.

23. А.Г. Хованский. *О разрешимости и неразрешимости уравнений в явном виде.* УМН, Т. 59, вып. 4(358), 2004, 69-146.