УДК 517.95+512.555

А. Г. Хованский, С. П. Чулков

Полином Гильберта для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами

Рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами. Обсуждаются теоремы существования и единственности для формальных и аналитических решений системы. Элементарными методами определяется и описывается аналог полинома Гильберта для такой системы.

Библиография: 7 наименований.

§ 1. Введение

В настоящей статье рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами с одной неизвестной функцией z в области U пространства $\mathbb{C}^n$. Мы изучаем пространства ростков формальных и аналитических решений в некоторой точке u области U. Обсуждаются следующие вопросы:

1) как задавать начальные данные для формальных и аналитических решений подобных систем, точнее, какие наборы производных неизвестной функции z можно фиксировать в данной точке, чтобы существовало единственное формальное (аналитическое) решение системы с такими данными?;

2) чему равны размерности пространств k-струй ростков формальных и аналитических решений системы в зависимости от натурального числа k и точки u области U?

Получены следующие результаты. Показано, что существует "плохая" гиперповерхность Σ, в дополнении $U\setminus\Sigma$ к которой пространства ростков формальных и аналитических решений в каждой точке имеют в некотором смысле одинаковую структуру. А именно, существует не зависящее от точки u из дополнения множество частных производных, которые можно рассматривать в точке u как начальные данные для формального решения (теорема 1). Формальное решение будет сходящимся, если и только если сумма части ряда Тейлора, построенная по фиксированным производным, будет сходиться (теорема 3).

Работа второго автора выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 01-01-00739), и программы "Ведущие научные школы РФ" (грант НШ-1972.2003.1) и NWO-RFBR 047.011.2004.026 (РФФИ 05-02-89000-НВО).

Для каждой точки u из дополнения $U \setminus \Sigma$ и каждого натурального числа k обозначим через $A_u(k)$ и $F_u(k)$ пространства k-струй в точке u ростков соответственно формальных и аналитических решений в этой точке. Для всех k размерности пространств $A_u(k)$ и $F_u(k)$ одинаковы и не зависят от точки u (следствие 4). При достаточно больших k функция $H(k) = \dim A_u(k) = \dim F_u(k)$ является полиномом по k (следствие 3). Более того, выявлен алгебраический смысл функции H. По системе дифференциальных уравнений строится семейство аффинных алгебраических многообразий, аналитически зависящих от параметра – точки u области U. Для значений параметра, лежащих в дополнении $U \setminus \Sigma$ к гиперповерхности Σ, функции Гильберта этих многообразий одинаковы и совпадают с функцией H (см. п. 6.4).

Рассматриваемые вопросы являются классическими, и обсуждаемые в работе результаты не являются абсолютно новыми. Наиболее важные результаты по данной теме получены Рикье [1] (теория Рикье изложена на русском языке в книге [2]) и В. П. Паламодовым [3]. В [1] рассмотрен вопрос о правильной постановке начальных условий для формальных и аналитических решений нелинейных систем. В этой замечательной работе вводится полный порядок на множестве частных производных функции многих переменных. В случае линейных систем с постоянными коэффициентами метод Рикье содержит в себе то, что впоследствии стало называться базисами Грёбнера и произвело революцию в вычислительной коммутативной алгебре. Тем не менее, в работе [1] вследствие общности рассматриваемых задач решения не доведены до получения окончательных результатов.

Более простой случай линейных систем был рассмотрен В. П. Паламодовым, которому удалось доказать теоремы существования и единственности для формальных и аналитических решений в общей ситуации, не охватываемой подходом Рикье. В работе [3] доказано, что для линейных систем “плохое” множество меньше, чем “плохая” гиперповерхность Σ, к которой приводит метод Рикье. Технически работа В. П. Паламодова значительно более сложна и опирается на специально разработанные им методы.

В настоящей работе мы используем подход Рикье, но применяем его только для линейных систем, для которых с его помощью можно получить достаточно хорошие результаты.

Как недавно выяснил второй автор настоящей статьи, более общие теоремы Паламодова можно доказать модификацией метода Рикье, не используя разработанную В. П. Паламодовым тонкую технику. Этот результат будет опубликован в отдельной статье.

§ 2. Свойства полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$

Рассмотрим полугруппу $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbb{Z},\ \alpha_i \geqslant 0\}$. Модулем элемента α полугруппы назовем неотрицательное целое число $|\alpha|$, равное сумме $\sum \alpha_i$.

В этом параграфе приведены необходимые нам сведения о полугруппе $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$.

2.1. Упорядоченная полугруппа $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. Фиксируем на полугруппе $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ отношение порядка $\prec$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) для любых элементов α и β полугруппы, модули которых удовлетворяют неравенству $|\alpha| < |\beta|$, выполнено отношение $\alpha \prec \beta$;

б) отношение $\prec$ согласовано с операцией сложения на $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, т. е. для любых элементов α, β и γ полугруппы неравенство $\alpha \prec \beta$ влечет неравенство $\alpha + \gamma \prec \beta + \gamma$.

Оказывается, каким бы ни был рассматриваемый порядок $\prec$ на полугруппе $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, на любом конечном подмножестве полугруппы он задается одним линейным функционалом. А именно, верна следующая

Лемма 1. *Пусть A – конечное подмножество полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. Существует линейный функционал*

$$\Pi_A \colon \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \qquad \Pi_A(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \alpha_i,$$

где π_i – некоторые положительные вещественные числа и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, удовлетворяющий следующему условию: для любых $\alpha, \beta \in A$ таких, что $\alpha \prec \beta$, выполнено неравенство

$$\Pi_A(\alpha) < \Pi_A(\beta).$$

Доказательство. Рассмотрим цепочку естественных вложений $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \subset \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через B следующее конечное подмножество группы $\mathbb{Z}^n$:

$$B = \{\delta \in \mathbb{Z}^n \mid \exists \alpha, \beta \in A \colon \alpha \prec \beta,\ \delta = \beta - \alpha\}.$$

Пусть $\operatorname{conv}(B)$ – выпуклая оболочка точек множества B в пространстве $\mathbb{R}^n$. Поскольку упорядочивание $\prec$ согласовано с операцией сложения на полугруппе $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, то $\operatorname{conv}(B)$ не содержит точки 0. Действительно, предположим противное. Пусть

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \delta^i = 0, \tag{1}$$

где $\delta^i \in B \subset \mathbb{Z}^n$, $\delta^i = \beta^i - \alpha^i$, $\beta^i, \alpha^i \in A$, и $p_i \in \mathbb{R}$, $p_i > 0$. Однако (1) можно рассматривать как систему линейных однородных уравнений с целыми коэффициентами, где координаты вектора $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N$ – неизвестные. Существование нетривиального решения системы влечет существование нетривиального векторного подпространства решений. Так как коэффициенты уравнений системы (1) – целые числа, то рациональные векторы всюду плотны в пространстве решений. Следовательно, существуют рациональные, а значит, и целые положительные числа $\tilde{p}_i$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i \delta^i = 0.$$

Тогда выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i \beta^i = \sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i \alpha^i.$$

С другой стороны, $\alpha_i \prec \beta_i$, следовательно, $\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i \alpha_i \prec \sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i \beta_i$. Противоречие.

Поскольку замкнутое ограниченное выпуклое множество $\operatorname{conv}(B)$ не содержит точки 0, существует функционал

$$L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad L(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i x_i,$$

такой, что для любой точки $x \in \operatorname{conv}(B)$ значение $L(x)$ больше нуля. Положив теперь $\pi_i = S + l_i$, где S – достаточно большое натуральное число, получим искомый функционал Π_A.

Замечание 1. Обобщая рассуждения, используемые выше, нетрудно доказать следующий хорошо известный факт (см., например, [4] или [5]).

Предложение 1. *Рассмотрим на полугруппе $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ отношение порядка $\prec$, согласованное с операцией сложения. Тогда существуют линейные функционалы $\Pi^1, \dots, \Pi^j$, где $j \leqslant n$,*

$$\Pi^i\colon \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \to \mathbb{R},$$

такие, что порядок $\prec$ является лексикографическим относительно этого набора функционалов, т.е. утверждение $\alpha \prec \beta$ равносильно утверждению

$$\Pi^1(\alpha) = \Pi^1(\beta), \quad \dots, \quad \Pi^i(\alpha) = \Pi^i(\beta), \qquad \Pi^{i+1}(\alpha) < \Pi^{i+1}(\beta)$$

для некоторого i, принадлежащего множеству $\{0, \dots, j-1\}$.

Обозначим через Π_k, где k – натуральное число, функционал, удовлетворяющий условиям леммы 1 для множества $A_k = \bigl\{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \mid |\alpha| \leqslant k\bigr\}$. Пусть $\mu_k = \min_{\{\alpha,\beta \in A_k,\, \alpha \neq \beta\}} |\Pi_k(\beta) - \Pi_k(\alpha)|$. Отметим, что $\mu_k > 0$.

2.2. Свойства $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$-идеалов. Назовем *октантом* $O^n(a) \subset \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ *с вершиной в точке* $a \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ подмножество целых точек $b \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ таких, что $a \preceq b$.

Идеалом в полугруппе $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ ($\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$-*идеалом*) называется ее подмножество, вместе с каждой точкой содержащее полностью октант с вершиной в этой точке. Ясно, что октант является идеалом в $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$.

Известными (см., например, [6]) являются следующие два утверждения относительно идеалов в полугруппе $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$.

Предложение 2 (нётеровость полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$). *Каждый $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$-идеал является объединением конечного числа октантов (другими словами, объединение бесконечного числа октантов является объединением конечного числа октантов).*

Полугруппа $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ имеет 2^n координатных полугрупп: для каждого подмножества I отрезка натурального ряда $\{1,\dots,n\}$ определена подполугруппа $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}(I)$, состоящая из целых точек $a=(a_1,\dots,a_n)$, для которых $a_i=0$, если $i\in I$, и $a_i\geqslant 0$, если $i\notin I$. Среди полугрупп $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}(I)$ существуют нулевая полугруппа (при $I=\{1,\dots,n\}$) и полугруппа $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ (при $I=\varnothing$).

Подмножество полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ назовем *сдвинутой координатной подполугруппой*, если оно имеет вид $a+\mathbb{Z}_{\geqslant 0}(I)$, где $a\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ – некоторый элемент.

Предложение 3. *Дополнение к идеалу в полугруппе $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ представимо в виде конечного числа непересекающихся сдвинутых координатных полугрупп.*

§ 3. Отображение Грёбнера и базисы дифференциальных идеалов

В настоящем параграфе для кольца линейных дифференциальных операторов определяется отображение Грёбнера и с его помощью исследуются идеалы в этом кольце.

Рассмотрим произвольную область U пространства $\mathbb{C}^n$ с координатами $x_1,\dots,x_n$ и некоторое подкольцо B кольца $\mathcal{O}(U)$ голоморфных функций в области U, содержащее 1 и замкнутое относительно операции дифференцирования.

Обозначим через Dif_B кольцо линейных дифференциальных операторов в области U с коэффициентами, лежащими в B. Пусть $d\in\mathrm{Dif}_B$, тогда

$$d=\sum_{\alpha\in\operatorname{supp} d} b_\alpha\partial_\alpha,$$

где $b_\alpha(\not\equiv 0)\in B$ и $\operatorname{supp} d$ – конечное подмножество полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, через ∂_α обозначен оператор дифференцирования $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$. Конечное множество $\operatorname{supp} d$ будем называть *носителем* оператора d.

Определение 1. *Отображением Грёбнера* называется следующее отображение:

$$\mathrm{Grb}\colon \mathrm{Dif}_B\setminus\{0\}\to\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0},\qquad \mathrm{Grb}(d)=\max_{\alpha\in\operatorname{supp} d}\alpha.$$

Максимум в правой части последнего равенства берется относительно $\prec$.

Ключевым для дальнейших построений является следующее замечательное свойство отображения Грёбнера.

Лемма 2. *Для любых ненулевых элементов D и d кольца Dif_B выполнено*

$$\mathrm{Grb}(D\circ d)=\mathrm{Grb}(d\circ D)=\mathrm{Grb}(D)+\mathrm{Grb}(d),\tag{2}$$

причем коэффициенты при старшей относительно введенного порядка производной в разложениях операторов $D\circ d$ и $d\circ D$ равны произведению коэффициентов при старших производных элементов d и D.

Доказательство. Обозначим через $\sum_{|\alpha|=N(D)} D_\alpha\partial_\alpha$ и $\sum_{|\alpha|=N(d)} d_\alpha\partial_\alpha$, где $D_\alpha, d_\alpha \in A$, старшие однородные части операторов D и d соответственно. Старшие однородные части операторов $D\circ d$ и $d\circ D$ равны

$$\sum_{|\alpha|=N(D)+N(d)} \ \sum_{\{|\beta|=N(D),\, |\gamma|=N(d),\, \beta+\gamma=\alpha\}} D_\beta d_\gamma \partial_\alpha. \tag{3}$$

Однако в силу условия а), наложенного на отношение порядка $\prec$, образы при отображении Грёбнера оператора и его старшей однородной части совпадают.

Следствие 1. *Образ идеала кольца* Dif_B *при отображении Грёбнера является идеалом полугруппы* $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$.

Пусть $\mathcal{I}$ – левый идеал кольца Dif_B. В силу следствия 1 образ $\mathrm{Grb}(\mathcal{I})$ является идеалом в полугруппе $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, а следовательно, по предложению 2 представляется в виде объединения конечного числа октантов. Пусть

$$\mathrm{Grb}(\mathcal{I}) = \bigcup_{i=1}^{N} O(\gamma_i). \tag{4}$$

Рассмотрим элементы $l_1,\dots,l_N$ идеала $\mathcal{I}$ такие, что $\mathrm{Grb}(l_i)=\gamma_i$. Для каждого i, $1\leqslant i\leqslant N$, обозначим через $a_{\gamma_i}\in B$ коэффициент при ∂_{γ_i} в разложении оператора l_i.

Пусть $\mathcal{M}$ – мультипликативная система в кольце B, порожденная функциями $1, a_{\gamma_1},\dots,a_{\gamma_N}$, т.е. $\mathcal{M}$ – наименьшее замкнутое относительно умножения подмножество кольца B, содержащее элементы $1, a_{\gamma_1},\dots,a_{\gamma_N}$. Рассмотрим локализацию $\mathcal{M}^{-1}B$ кольца B по мультипликативной системе $\mathcal{M}$. Элементы кольца $\mathcal{M}^{-1}B$ – это классы эквивалентности формальных отношений $\frac{b}{m}$, где b – произвольный элемент кольца B, а m – элемент мультипликативной системы $\mathcal{M}$. Кольцо $\mathcal{M}^{-1}B$ естественным образом можно рассматривать как подкольцо кольца $\mathcal{O}_{U\setminus M}$ голоморфных функций в области $U\setminus M$, где $M=\{a_{\gamma_1}\dots a_{\gamma_N}=0\}$. Очевидно, что кольцо $\mathcal{M}^{-1}B$ замкнуто относительно операции дифференцирования.

Рассмотрим кольцо $\mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B}$. Будем считать, что элементы кольца Dif_B являются элементами кольца $\mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B}$, подразумевая их образ в $\mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B}$ при естественном вложении

$$\pi\colon\ \mathrm{Dif}_B \mapsto \mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B}, \tag{5}$$
$$\sum_\alpha b_\alpha\partial_\alpha \mapsto \sum_\alpha \frac{b_\alpha}{1}\,\partial_\alpha.$$

Предложение 4. *Элементы* $l_1,\dots,l_N$ *порождают базис идеала* $\mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B}\cdot\mathcal{I}$ *кольца* $\mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B}$.

Через $\mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B}\cdot\mathcal{I}$ обозначен наименьший левый идеал кольца $\mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B}$, содержащий образ при вложении (5) идеала $\mathcal{I}$.

Замечание 2. Геометрически предложение 4, очевидно, означает, что элементы $l_1,\dots,l_N$ образуют базис идеала $\mathcal{I}$, если мы сузим область определения коэффициентов рассматриваемых дифференциальных операторов до $U\setminus M$.

Доказательство предложения 4. Для кольца $\mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B}$, как и для кольца Dif_B, определено отображение Грёбнера Grb, причем для каждого элемента d кольца Dif_B выполнено равенство $\mathrm{Grb}(\pi(d)) = \mathrm{Grb}(d)$. Следовательно, выполнено равенство $\mathrm{Grb}(\mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B} \cdot \mathcal{I}) = \mathrm{Grb}(\mathcal{I})$.

Рассмотрим произвольный ненулевой элемент u идеала $\mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B} \cdot \mathcal{I}$. Пусть $u = f_u \partial_{\mathrm{Grb}(u)} + r$, где r – младшие члены. Для некоторого $k = 1, \ldots, N$ образ $\mathrm{Grb}(u)$ принадлежит октанту $O^n(\gamma_k)$, следовательно, $\mathrm{Grb}(u) = \gamma_k + \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. Положим

$$u_1 = u - \frac{f_u}{a_{\gamma_k}}\, \partial_\alpha \circ l_k.$$

Имеем либо $u_1 = 0$, либо $\mathrm{Grb}(u_1) \prec \mathrm{Grb}(u)$ в силу леммы 2. Если элемент u_1 идеала $\mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B} \cdot \mathcal{I}$ не равен нулю, то процесс можно повторить. Однако бесконечной цепочки $u, u_1, u_2, \ldots \in \mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B} \cdot \mathcal{I}$ такой, что $\mathrm{Grb}(u) \succ \mathrm{Grb}(u_1) \succ \mathrm{Grb}(u_2) \succ \cdots$, быть не может. Действительно, условие а), наложенное на отношение $\prec$, гарантирует, что в $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ существует только конечное число элементов, меньших данного, $(\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}, \preceq)$ – вполне упорядоченное множество. Следовательно, для некоторого l элемент $u_l = 0$. Подставив в последнее равенство вместо u_l его выражение через u и l_i, получаем требуемое.

Замечание 3. Построенное при доказательстве предложения 4 разложение элемента $u = \sum_{i=1}^{k} p_i \circ l_i$ идеала таково, что для каждого i выполнено неравенство $\mathrm{Grb}(p_i \circ l_i) \preceq \mathrm{Grb}(u)$.

Система образующих идеала, построенная при доказательстве последнего утверждения (индуцированная отображением Грёбнера) называется *базисом Грёбнера идеала.*

Рассмотрим подмодуль $\mathrm{MI} \subset \mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B}$, порожденный над $\mathcal{M}^{-1}B$ образующими $\{\partial_\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \setminus \mathrm{Grb}(\mathcal{I})$.

Предложение 5. *Имеет место разложение в прямую сумму*:

$$\mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B} = \mathrm{MI} \oplus \mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B} \cdot \mathcal{I}. \tag{6}$$

Доказательство. Необходимо доказать, что произвольный элемент d кольца $\mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B}$ единственным образом разлагается в сумму:

$$d = m(d) + i(d), \tag{7}$$

где $i(d) \in \mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B} \cdot \mathcal{I}$ и $m(d) \in \mathrm{MI}$, т. е. $\operatorname{supp} m(d) \subset \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \setminus \mathrm{Grb}(\mathcal{I})$. Докажем единственность. Предположим, что существуют хотя бы два разложения:

$$d = i_1 + m_1 = i_2 + m_2,$$

где $i_1, i_2 \in \mathcal{I}$, а $m_1, m_2 \in \mathrm{MI}$. Тогда $0 \neq i_1 - i_2 = m_2 - m_1$, следовательно, $\mathrm{Grb}(i_1 - i_2) = \mathrm{Grb}(m_2 - m_1)$. Однако $(i_1 - i_2) \in \mathcal{I}$, следовательно, $\mathrm{Grb}(i_1 - i_2) \in \mathrm{Grb}(\mathcal{I})$. С другой стороны, $\operatorname{supp}(m_2 - m_1) \subset \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \setminus \mathrm{Grb}(\mathcal{I})$, значит, $\mathrm{Grb}(m_2 - m_1) \notin \mathrm{Grb}(\mathcal{I})$. Противоречие.

Докажем теперь существование разложения. Разложение строится по следующему алгоритму. Пусть $d \in \mathrm{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}B}$. Если $\operatorname{supp} d \cap \mathrm{Grb}(\mathcal{I}) = \varnothing$, полагаем

$m(d) = d$ и $i(d) = 0$. Иначе рассмотрим $\mu(d) = \max_{\alpha \in \operatorname{supp} d \cap \operatorname{Grb}(\mathcal{I})} \alpha$. Пусть $\mu(d) = \gamma_k + \alpha$ для некоторых $1 \leqslant k \leqslant N$ и $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. Рассмотрим разность $d - a\partial_\alpha\bigl(\frac{l_k}{a_{\alpha_k}}\bigr)$, где коэффициент $a \in B$ выбран таким, что либо

$$\operatorname{supp}\biggl(d - a\partial_\alpha\biggl(\frac{l_k}{a_{\alpha_k}}\biggr)\biggr) \cap \operatorname{Grb}(\mathcal{I}) = \varnothing,$$

тогда $m(d) = d - a\partial_\alpha\bigl(\frac{l_k}{a_{\alpha_k}}\bigr)$ и $i(d) = a\partial_\alpha\bigl(\frac{l_k}{a_{\alpha_k}}\bigr)$, либо

$$\operatorname{supp}\biggl(d - a\partial_\alpha\biggl(\frac{l_k}{a_{\alpha_k}}\biggr)\biggr) \cap \operatorname{Grb}(\mathcal{I}) \neq \varnothing,$$

и мы повторяем процесс. Заметим, что выполнено неравенство

$$\mu\biggl(d - a\partial_\alpha\biggl(\frac{l_k}{a_{\alpha_k}}\biggr)\biggr) \prec \mu(d).$$

Поскольку $(\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}, \preceq)$ – вполне упорядоченное множество, за конечное число шагов мы получим необходимое разложение.

§ 4. Формальные решения системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных

Введем необходимые обозначения. Фиксируем область U пространства независимых переменных $\mathbb{C}^n$. Фиксируем некоторое подкольцо A кольца $\mathcal{O}(U)$ голоморфных функций в области U, содержащее 1 и замкнутое относительно операции дифференцирования.

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений в области U:

$$\begin{gathered} D_1 z = 0, \\ \dots\dots\dots \\ D_k z = 0, \\ \dots\dots\dots \end{gathered} \tag{8}$$

где $D_i \in \operatorname{Dif}_A$, $i = 1, 2, \dots$.

Число уравнений в системе (8) может быть и бесконечным. Далее в этом параграфе для каждой точки u некоторого открытого всюду плотного подмножества множества U описываются пространства формальных решений системы (8) в окрестности этой точки.

4.1. Формальные решения системы как функционалы на кольце дифференциальных операторов. Пусть u – некоторая точка области U. Рассмотрим подкольцо B кольца $\mathcal{O}_u$ ростков голоморфных функций в точке u.

Определение 2. Отображение $\varphi\colon M \mapsto \mathbb{C}$ B-модуля M называется *u-линейным*, если

$$\varphi\biggl(\sum_{j=1}^{N} f_j L_j\biggr) = \sum_{j=1}^{N} f_j(u)\varphi(L_j) \tag{9}$$

для произвольных $L_i \in M$ и $f_i \in B$.

Через $L_u(M)$ обозначим пространство u-линейных отображений модуля M.

Лемма 3. *Для любой точки u из области U имеет место естественный изоморфизм векторных пространств*:

$$L_u(\operatorname{Dif}_A) \cong \mathbb{C}[[x-u]]. \tag{10}$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что следующее отображение задает изоморфизм

$$\mathbb{C}[[x-u]] \mapsto L_u(\operatorname{Dif}_A), \tag{11}$$

$$f(d) = d(f)|_{x=u}, \tag{12}$$

где $d \in \operatorname{Dif}_A$, $f, d(f) \in \mathbb{C}[[x-u]]$, а через $d(f)|_{x=u}$ обозначен свободный член ряда $d(f)$.

Обозначим через $\mathcal{I}(S)$ левый идеал кольца Dif_A, порожденный операторами, стоящими в левых частях уравнений системы (8). Докажем следующее

Предложение 6. *Формальный ряд $f \in \mathbb{C}[[x-u]]$ задает u-линейное отображение пространства Dif_A, тождественно равное нулю на идеале $\mathcal{I}(S)$, тогда и только тогда, когда для любого оператора $d \in \mathcal{I}(S)$ выполнено равенство $d(f) = 0$, т. е. ряд f является формальным решением системы* (8).

Доказательство. Действительно, для произвольного оператора $d \in \operatorname{Dif}_A$ равенство $d(f) = 0$ равносильно тому, что $\partial_\alpha(d(f))|_{x=u} = (\partial_\alpha \circ d)(f)|_{x=u} = 0$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, откуда получаем требуемое утверждение.

Обозначим через $F_u(S)$ пространство формальных решений в точке u системы (8).

Следствие 2. *Имеет место естественный изоморфизм*

$$F_u(S) = L_u(\operatorname{Dif}_A / \mathcal{I}(S)). \tag{13}$$

Мы опишем пространства u-линейных отображений, опираясь на следующую лемму. Пусть $\mathcal{M}$ – некоторая мультипликативная система в A, т. е. $\mathcal{M}$ – подмножество A, содержащее 1 и замкнутое относительно умножения (см. § 3). Как отмечено выше, кольцо частных $\mathcal{M}^{-1}A$ будет замкнуто относительно дифференцирования.

Рассмотрим произвольный левый идеал $\mathcal{I}$ кольца Dif_A. Обозначим через $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{I}$ наименьший левый идеал кольца $\operatorname{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}A}$, содержащий образ $\pi_*(\mathcal{I})$ идеала $\mathcal{I}$ при вложении

$$\pi\colon \operatorname{Dif}_A \to \operatorname{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}A}. \tag{14}$$

Лемма 4. *Для любой точки u области U векторные пространства u-линейных отображений $L_u(\operatorname{Dif}_A / \mathcal{I})$ и $L_u(\operatorname{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}A} / \mathcal{M}^{-1}\mathcal{I})$ естественным образом изоморфны, если только значение каждой функции мультипликативной системы $\mathcal{M}$ в точке u отлично от нуля.*

Доказательство. Вложение π индуцирует отображение

$$\pi^*\colon L_u(\operatorname{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}A}/\mathcal{M}^{-1}\mathcal{I}) \to L_u(\operatorname{Dif}_A/\mathcal{I}). \tag{15}$$

Следующая выкладка показывает, что π^* – изоморфизм:

$$(\pi^*)^{-1}(l)\biggl(\biggl[\sum_{j=1}^{N}\frac{d_\alpha}{x_\alpha}\,\partial^\alpha\biggr]\biggr) = \sum_{j=1}^{N}\frac{d_\alpha(u)}{x_\alpha(u)}\,l([\partial^\alpha]), \tag{16}$$

где $d_{\alpha_j}\in A,\ x_{\alpha_j}\in\mathcal{M}$. Через $[d]$ для произвольного элемента d кольца Dif_A обозначен элемент $\operatorname{Dif}_{\mathcal{M}^{-1}A}/\mathcal{M}^{-1}\mathcal{I}$, представителем которого является элемент d.

4.2. Существование формальных решений. Рассмотрим $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$-идеал $\operatorname{Grb}(\mathcal{I}(S))$. В силу предложения 2 можно представить $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$-идеал $\operatorname{Grb}(\mathcal{I}(S))$ в виде конечного объединения октантов:

$$\operatorname{Grb}(\mathcal{I}(S)) = \bigcup_{i=1}^{l} O(\gamma_i). \tag{17}$$

Выберем элементы $s_1,\dots,s_l$ идеала $\mathcal{I}(S)$ такие, что $\operatorname{Grb}(s_i)=\gamma_i$ для каждого i. Обозначим через Γ мультипликативную систему в кольце A, порожденную 1 и старшими коэффициентами операторов s_i (т.е. коэффициентами s_{γ_i} при производных ∂_{γ_i}). Кроме того, через Σ обозначим аналитическую гиперповерхность, заданную уравнением $s_{\gamma_1}\dots s_{\gamma_l}=0$.

Предложение 4 имеет следующую, очевидную, геометрическую переформулировку.

Предложение 7. *Элементы $s_1,\dots,s_l$ порождают идеал $\operatorname{Dif}_{\Gamma^{-1}A}\cdot\mathcal{I}(S)$. Другими словами, в области $U\setminus\Sigma$ рассматриваемая система* (8) *эквивалентна конечной системе уравнений, составленной только из уравнений $s_i z=0$, где индекс i изменяется от 1 до l.*

Назовем *носителем* $\operatorname{supp} f$ *формального* (*сходящегося*) *ряда*

$$f=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}} f_\alpha(x-u)^\alpha$$

подмножество полугруппы

$$\operatorname{supp} f=\{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}\mid f_\alpha\neq 0\}. \tag{18}$$

Теорема 1. *Пусть $u\in U\setminus\Sigma$. Тогда имеет место изоморфизм векторных пространств*:

$$F_u(S)\cong\bigl\{f\in\mathbb{C}[[x-u]]\mid \operatorname{supp} f\subset\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}\setminus\operatorname{Grb}(\mathcal{I}(S))\bigr\}. \tag{19}$$

Доказательство. Рассмотрим свободный $\Gamma^{-1}A$-модуль $\mathrm{MI}(S)$ с базисом $\{\partial_\alpha\},\ \ \alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}\setminus\operatorname{Grb}(\mathcal{I}(S))$. Очевидно, что

$$L_u(\mathrm{MI})\cong\bigl\{f\in\mathbb{C}[[x-u]]\mid \operatorname{supp} f\subset\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}\setminus\operatorname{Grb}(\mathcal{I}(S))\bigr\}. \tag{20}$$

Однако в силу предложения 5 имеет место изоморфизм $\Gamma^{-1}A$-модулей:

$$\mathrm{MI} \cong \mathrm{Dif}_{\Gamma^{-1}A} / \Gamma^{-1}\mathcal{I}(S). \tag{21}$$

Поскольку $u \in U \setminus \Sigma$, все функции мультипликативной системы $\Gamma \subset A$ отличны от нуля в точке u, следовательно, по лемме 4 получаем

$$F_u(S) \cong L_u(\mathrm{Dif}_A / \mathcal{I}(S)) \cong L_u(\mathrm{Dif}_{\Gamma^{-1}A} / \Gamma^{-1}\mathcal{I}(S)). \tag{22}$$

Объединяя соотношения (20)–(22), получаем утверждение теоремы.

Для целых неотрицательных i рассмотрим

$$F_{u,i}(S) = F_u(S) / \bigl(f \sim g \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} f - g = o((x-u)^i)\bigr) \tag{23}$$

– пространство i-струй формальных решений в точке $u \in U$. Функцию $H(u,i) = \dim F_{u,i}(S)$ натурального аргумента i назовем *функцией Гильберта* системы (8) в точке u.

Следствие 3. *Функция Гильберта $H(u,i)$ одна и та же для всех $u \in U \setminus \Sigma$ и является многочленом для достаточно больших i.*

Доказательство. В силу (19) выполнено равенство

$$\dim F_{u,i}(S) = \bigl|\bigl\{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \setminus \mathrm{Grb}(\mathcal{I}(S)) \mid |\alpha| \leqslant i\bigr\}\bigr|, \tag{24}$$

откуда получаем первое утверждение (для конечного множества A через $|A|$ обозначено число его элементов). В силу предложения 3 можно представить $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \setminus \mathrm{Grb}(\mathcal{I}(S))$ в виде

$$\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \setminus \mathrm{Grb}(\mathcal{I}(S)) = \bigcup_{k=1}^{l} \{a_k + \mathbb{Z}_{\geqslant 0}(I_k)\}. \tag{25}$$

Однако для каждой сдвинутой координатной полугруппы $a_k + \mathbb{Z}_{\geqslant 0}(I_k)$ функция

$$H_{(a_k,I_k)}(i) = \bigl|\bigl\{\alpha \in a_k + \mathbb{Z}_{\geqslant 0}(I_k) \mid |\alpha| \leqslant i\bigr\}\bigr|,$$

очевидно, является многочленом при $i \geqslant |a_k|$ $\bigl($нетрудно проверить, что для $i \geqslant |a_k|$ выполнено $H_{(a_k,I_k)}(i) = \binom{n-|I|+i-a_k}{i-a_k}\bigr)$. Следовательно, функция Гильберта

$$H(u,i) = \sum_{j=1}^{l} H_{(a_j,I_j)}(i)$$

является многочленом при $i \geqslant \max_k |a_k|$. Следствие доказано.

§ 5. Теорема сходимости

5.1. Теорема сходимости и ее следствия. Для доказательства теоремы единственности и существования для ростков аналитических решений системы понадобится следующее утверждение. Предположим, что формальный ряд

$$z(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}} a_\alpha x^\alpha$$

удовлетворяет следующей конечной системе дифференциальных соотношений:

$$\begin{array}{ll} \partial_{\gamma_1} z = F_1(x, \partial_\alpha z), & \alpha \prec \gamma_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ \partial_{\gamma_k} z = F_k(x, \partial_\alpha z), & \alpha \prec \gamma_k, \end{array} \tag{26}$$

где $F_1, \dots, F_k$ – голоморфные функции переменных $x_1, \dots, x_n$ и производных $\partial_\alpha z$ с показателями α, удовлетворяющими неравенствам правого столбца системы. Рассмотрим подмножество $I = \bigcup_{i=1}^k O(\gamma_i)$ полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$.

Теорема 2. *Предположим, что укорочение $\tilde{z}(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \setminus I} a_\alpha x^\alpha$ ряда z имеет ненулевой радиус сходимости. Тогда формальное решение z имеет ненулевой радиус сходимости.*

Доказательство этой теоремы приведено далее, в п. 5.2.

Пусть $A_u(S)$ – пространство ростков аналитических решений системы в точке u. Объединяя утверждения теорем 2 и 1, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Для произвольной точки $u \in U \setminus \Sigma$ имеет место изоморфизм векторных пространств*:

$$A_u \cong \bigl\{ f \in \mathbb{C}\{(x-u)\} \mid \operatorname{supp} f \subset \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \setminus \operatorname{Grb}(\mathcal{I}) \bigr\}. \tag{27}$$

Доказательство. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений, состоящую из уравнений $s_1 z = 0, \dots, s_l z = 0$, где s_i – выбранные выше элементы идеала $\mathcal{I}(S)$ такие, что равенство $\operatorname{Grb}(s_i) = \gamma_i$ выполняется для каждого i. В силу предложения 7 в области $U \setminus \Sigma$ эта система эквивалентна исходной системе (8). Разрешим каждое уравнение $s_i z = 0$ относительно старшей (в смысле нашего упорядочения) производной γ_i (мы можем это сделать ввиду выбора гиперповерхности Σ). Теперь к разрешенной системе мы можем применить теорему 2.

Фиксируем разбиение множества $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \setminus \operatorname{Grb}(\mathcal{I})$ на сдвинутые координатные полугруппы:

$$\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \setminus \operatorname{Grb}(\mathcal{I}) = \bigcup_{k=1}^{l} \{a_k + \mathbb{Z}_{\geqslant 0}(I_k)\}. \tag{28}$$

Следствием теоремы 3 является следующая

Теорема 4. *Для произвольной точки $u \in U \setminus \Sigma$ существует и единственно голоморфное в некоторой окрестности этой точки решение $z(x)$ системы (8), удовлетворяющее следующим l начальным условиям:*

$$\partial_{a_k} z(x)|_{\{x_i = u_i,\, i \in I_k\}} = \psi_k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}), \qquad 1 \leqslant k \leqslant l,$$

где $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{1, \ldots, n\} \setminus I_k$, ψ_i – произвольные голоморфные функции своих аргументов в окрестности точки u (если некоторое $I_k = \{1, \ldots, n\}$, то ψ_k – просто комплексное число).

Доказательство. Для вывода этой теоремы из предыдущей необходимо заметить, что сходящийся ряд, составленный из мономов, показатели которых принадлежат некоторой координатной полугруппе $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}(I)$, где $I = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_m\}$, есть голоморфная функция переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$.

Пусть $A_{u,i}(S)$ – пространство i-струй ростков аналитических решений в точке u.

Следствие 4. *Для произвольной точки $u \in U \setminus \Sigma$ размерности следующих векторных пространств равны для каждого i:*

$$\dim F_{u,i}(S) = \dim A_{u,i}(S). \tag{29}$$

5.2. Доказательство теоремы 2. Доказательство основано на методе мажорант. Рассмотрим кольцо $\mathbb{C}[[y_1, \ldots, y_l]]$ формальных рядов от некоторых переменных $y_1, \ldots, y_l$. Пусть $A, B \in \mathbb{C}[[y_1, \ldots, y_l]]$.

Определение 3. Формальный ряд $A(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^l_{\geqslant 0}} a_\alpha y^\alpha$ *усиливает* (*мажорирует*) ряд $B(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^l_{\geqslant 0}} b_\alpha y^\alpha$, если для любого элемента α полугруппы $\mathbb{Z}^l_{\geqslant 0}$ выполнены следующие два условия:

$$a_\alpha \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \quad \text{и} \quad |b_\alpha| \leqslant a_\alpha.$$

Идея доказательства заключается в построении сходящегося ряда, мажорирующего данное формальное решение. Этот мажорирующий ряд строится по решению некоторого уравнения, говоря неформально, мажорирующего каждое уравнение исходной системы. Мажорирующее уравнение оказывается обыкновенным дифференциальным уравнением, для доказательства существования решения которого применима стандартная теорема существования и единственности.

Далее, в п. 5.2.1, доказываются необходимые подготовительные леммы о мажорировании, а в пп. 5.2.2–5.2.5 теорема доказывается для специального случая, когда уравнения системы линейны относительно производных старшего порядка, а главные производные имеют один и тот же порядок. В п. 5.2.2 формулируются условия разбираемого специального случая. В п. 5.2.3 система с помощью замены координат приводится к виду, по которому легко выписать необходимое мажорирующее уравнение. В п. 5.2.4 мы предъявляем мажорирующее уравнение и устанавливаем существование аналитического решения этого уравнения. В п. 5.2.5 мы строим по решению мажорирующего уравнения некоторый сходящийся ряд и, опираясь на лемму 5, доказываем, что полученный ряд мажорирует исходное формальное решение системы. И наконец, в п. 5.2.6 мы завершаем доказательство теоремы, сводя общий случай к разобранному.

5.2.1. *Леммы о мажорировании.* В первой из двух лемм данного пункта формулируется необходимый нам вариант утверждения о том, что свойство мажорирования выдерживает операцию композиции.

Рассмотрим голоморфные функции f_1 и f_2, определенные в окрестности нуля пространства $\mathbb{C}^{n+m} = \{(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_m) \mid x_i,\xi_j \in \mathbb{C}\}$. Предположим, что разложение в ряд функции f_2 усиливает разложение функции f_1.

Фиксируем набор $\alpha_1 \prec \dots \prec \alpha_m \prec \alpha_0$ из $m+1$ элемента полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$.

Пусть, далее, $w = \sum w_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}[[x]]$ и $z = \sum z_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[[x]]$ – некоторые ряды, и предположим, что выполнены следующие два условия:

1) для всех $\alpha \prec \alpha_0$ выполнено $|z_\alpha| \leqslant w_\alpha$;

2) для любого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, верно $w_{\alpha_i} = z_{\alpha_i} = 0$.

Тогда корректно определены ряд $W \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}[[x]]$ – результат подстановки в разложение функции f_2 вместо переменных ξ_i рядов $\partial_{\alpha_i} w$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и ряд $Z \in \mathbb{C}[[x]]$ – результат подстановки в разложение функции f_1 вместо переменных ξ_i рядов $\partial_{\alpha_i} z$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Лемма 5. *Для любого $\beta \prec \alpha_0$ верно неравенство $\bigl|\partial_\beta Z|_0\bigr| \leqslant \partial_\beta W|_0$.*

Доказательство. Пусть $Z = \sum_\alpha Z_\alpha x^\alpha$ и $W = \sum_\alpha W_\alpha x^\alpha$. Значения производных $\partial_\beta Z|_0 = \beta!\, Z_\beta$ и $\partial_\beta W|_0 = \beta!\, W_\beta$ являются суммами по одному и тому же набору индексов произведений вида

$$\beta!\, f^1_{(\alpha,\delta)} \prod_{i=1}^m (\alpha_i!)^{\delta_i} z_{\theta_1+\alpha_i} \cdots z_{\theta_{\delta_i}+\alpha_i} \tag{30}$$

и

$$\beta!\, f^2_{(\alpha,\delta)} \prod_{i=1}^m (\alpha_i!)^{\delta_i} w_{\theta_1+\alpha_i} \cdots z_{\theta_{\delta_i}+\alpha_i} \tag{31}$$

соответственно. В формулах (30) и (31) $\alpha,\theta \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, $\delta = (\delta_1,\dots,\delta_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$, а через $f^j_{(\alpha,\delta)}$, $j = 1,2$, обозначены коэффициенты разложений в ряды функций f^j. Отметим, что $\alpha + \sum \theta_i = \beta \prec \alpha_0$ в формулах (30) и (31), следовательно, в силу условий 1), 2) каждое слагаемое в (31) больше или равно модулю соответствующего слагаемого в (30), откуда получаем утверждение леммы.

Доказательство следующей, несложной, леммы см., например, в [2].

Лемма 6. *Предположим, что ряд $A(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}} a_\alpha x^\alpha$ абсолютно сходится в точке $x_1 = \dots = x_n = \rho > 0$ и M – положительное число, большее абсолютной величины любого члена ряда $A(\rho)$. Тогда разложения в степенной ряд в окрестности нуля функций $F_1(x) = \frac{M}{(1-x_1/\rho)\dots(1-x_n/\rho)}$ и $F_2 = \frac{M}{(1-(x_1+\dots+x_n)/\rho)}$ усиливают ряд $A(x)$.*

5.2.2. *Формулировка условий специального случая.* Без ограничения общности можно считать коэффициенты z_α при $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \setminus I$ ряда z равными нулю, так как по условию ряд, естественным образом из них составленный, определяет аналитическую функцию в некоторой окрестности начала координат.

Разберем теперь следующий специальный случай. Предположим, что система (26) линейна относительно производных старшего порядка, а все главные производные (т. е. производные, стоящие в левых частях уравнений) имеют один и тот же порядок. Точнее, соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_{\gamma_1} z &= \sum_{|\alpha|=N,\, \alpha\prec\gamma_1} f^1_\alpha\, \partial_\alpha z + f^1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \partial_{\gamma_k} z &= \sum_{|\alpha|=N, \alpha\prec\gamma_k} f^k_\alpha\, \partial_\alpha z + f^k, \end{aligned} \tag{32}$$

где $|\gamma_1| = \dots = |\gamma_k| = N > 0$, а голоморфные функции f^i_α, f^i зависят от переменных $x_1, \dots, x_n$ и производных $\partial_\beta z$ таких, что $|\beta| < N$.

5.2.3. *Замена координат.* В этом пункте с помощью замены координат мы добиваемся того, чтобы старшие производные стали “главными”. При данной замене коэффициенты при остальных производных умножаются на некоторые малые числа.

В сделанных предположениях f^i_α, f^i – голоморфные функции своих переменных в окрестности нуля. Для всех допустимых значений параметров i и α разложим функции f^i_α, f^i и M^α_i в степенные ряды в окрестности нуля. Предположим, что все эти ряды абсолютно сходятся в точке $x_1 = \dots = x_n = \partial_\alpha z = \rho$, где параметр α – произвольный элемент полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ такой, что $|\alpha| < N$. В силу леммы 6 выберем положительную вещественную константу C такую, чтобы разложение функции

$$\frac{C}{1 - (x_1 + \dots + x_n + \sum_{|\alpha|<N} \partial_\alpha z)/\rho}$$

усиливало соответствующие разложения функций f^i_α, f^i.

Обозначим через Π функционал Π_N (см. п. 2.1). Пусть $\mu = \mu_N$. Рассмотрим положительное вещественное число $\theta < 1$ такое, что

$$\theta^{\,\mu} < \varepsilon = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\Delta_N C}\,,$$

где Δ_i, $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, – количество элементов α полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ таких, что $|\alpha| = i$.

Положим $y_i = \theta^{-\pi_i} x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда

$$\frac{\partial^{|\alpha|} z}{\partial x^\alpha}\,(x) = \theta^{-\Pi(\alpha)} \frac{\partial^{|\alpha|} z}{\partial y^\alpha}\,(y(x)).$$

После замены координат и деления на коэффициент при старшей производной уравнения (32) имеют вид

$$\partial_{\gamma_i} z = \sum_{|\alpha|=N} f^i_\alpha\big(y, \theta^{-\Pi(\gamma)}\partial_\gamma z(y)\big)\theta^{\Pi(\gamma_i)-\Pi(\alpha)}\partial_\alpha z \\ + f^i\big(y, \theta^{-\Pi(\gamma)}\partial_\gamma z(y)\big)\theta^{\Pi(\gamma_i)}, \tag{33}$$

где i меняется от 1 до k.

Здесь и далее оператор частной производной рассматривается в новой системе координат. Формальный ряд $z(y) = z(x(y))$ удовлетворяет дифференциальным соотношениям (33) в новой системе координат (с "тождественно нулевыми начальными условиями"). Для всех допустимых α, i положим

$$\tilde{f}^i_\alpha(y, \partial_\gamma z) = f^i_\alpha\big(y, \theta^{-\Pi(\gamma)}\partial_\gamma z\big)\theta^{\Pi(\gamma_i)-\Pi(\alpha)},$$
$$\tilde{f}^i(y, \partial_\gamma z) = f^i\big(y, \theta^{-\Pi(\gamma)}\partial_\gamma z\big)\theta^{\Pi(\gamma_i)}.$$

Отметим, что в (33) выполнено

$$\theta^{\Pi(\gamma_i)} \leqslant \theta^{\Pi(\gamma_i)-\Pi(\alpha)} \leqslant \theta^{\Pi(\gamma)} \leqslant \theta^\mu < \varepsilon,$$

так как $|\gamma| < |\alpha| = |\gamma_i| = N$. Следовательно, мы доказали следующую лемму.

Лемма 7. *Разложение в степенной ряд функции*

$$\frac{\varepsilon C}{1 - (y_1 + \dots + y_n + \sum_{|\alpha|<N} \partial_\alpha z)/\rho_1}$$

для некоторого $0 < \rho_1 \ll \rho$ *усиливает соответствующие разложения функций* $\tilde{f}^i_\alpha$, $\tilde{f}^i$, *зависящих от переменных* y_i *и некоторых частных производных по этим переменным, для всех допустимых значений* i *и* α.

5.2.4. *Построение мажорирующего уравнения.* Рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$Y^{(N)}(t) = \frac{\varepsilon C}{1 - \big(t + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j Y^{(j)}(t)\big)/\rho_1}\big(\Delta_N Y^{(N)}(t) + 1\big). \tag{34}$$

Разрешив это уравнение относительно старшей производной, получим

$$Y^{(N)}(t) = \frac{2\varepsilon C}{1 - 2\big(t + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j Y^{(j)}(t)\big)/\rho_1}. \tag{35}$$

В равенстве (35) мы учли, что $\varepsilon \Delta_N C = 1/2$. В силу теоремы существования и единственности решения для обыкновенных дифференциальных уравнений существует и единственно решение $Z(t)$ уравнения (35) ((34)) с начальными условиями $Z^{(0)} = \dots = Z^{(N-1)} = 0$. Разложение функции $Z(t)$ в степенной ряд в окрестности нуля, очевидно, имеет строго положительные коэффициенты. Обозначим

$$G(Y, t) = \frac{\varepsilon C}{1 - \big(t + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j Y^{(j)}(t)\big)/\rho_1}.$$

5.2.5. *Построение мажорирующего ряда.* Докажем следующую лемму.

Лемма 8. *Разложение в степенной ряд в окрестности нуля функции* $Z\bigl(\sum_{i=1}^n y_i\bigr)$ *усиливает формальное решение* $z(y)$. *Следовательно, ряд* $z(y)$ *сходится в некоторой окрестности нуля.*

Доказательство. Пусть $Z\bigl(\sum_i y_i\bigr) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}} Z_\alpha y^\alpha$. Покажем индукцией по $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, что выполнено неравенство

$$|z_\alpha| \leqslant Z_\alpha. \tag{36}$$

Действительно, условие (36) выполнено для $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \setminus I$, а следовательно, и для $\alpha = 0$. Пусть теперь (36) верно для всех $\alpha \prec \alpha_0$. Докажем неравенство для α_0. Пусть $\alpha_0 = \beta + \gamma_i$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Тогда

$$\alpha_0!\,|z_{\alpha_0}| = \bigl|\partial_{\alpha_0} z|_0\bigr| = \left|\left(\partial_\beta\left(\sum_{|\alpha|=N,\,\alpha\prec\gamma_i} \tilde f^i_\alpha \partial_\alpha z + \tilde f^i\right)\bigg|_0\right)\right|.$$

Далее, в силу леммы 5 и равенства

$$\partial_\alpha F\Bigl(\sum y_i\Bigr) = F^{(|\alpha|)}\Bigl(\sum y_i\Bigr), \tag{37}$$

где F – произвольная голоморфная функция, получаем

$$\begin{aligned}&\left|\left(\partial_\beta\left[\sum_{|\alpha|=N,\alpha\prec\gamma_i} \tilde f^i_\alpha \partial_\alpha z + \tilde f^i\right]\right)\bigg|_0\right)\right| \\ &\qquad\leqslant \left(\partial_\beta\left[G\Bigl(Z,\sum_i y_i\Bigr)\Bigl(\Delta_N Z^{(N)}\Bigl(\sum_i y_i\Bigr)+1\Bigr)\right]\right)\bigg|_{y=0}.\end{aligned}$$

Действительно, каждое слагаемое вида

$$\tilde f^i_\alpha \partial_\alpha z \tag{38}$$

мажорируется в силу леммы 7 и предположения индукции слагаемым

$$G\Bigl(Z,\sum_i y_i\Bigr) Z^{(N)}\Bigl(\sum_i y_i\Bigr), \tag{39}$$

а количество слагаемых вида (38) не превосходит числа Δ_N. Необходимую оценку получаем для остальных слагаемых; далее применяем лемму 5. В силу (34) и (37) имеем

$$\begin{aligned}&\left(\partial_\beta\left[G\Bigl(Z,\sum_i y_i\Bigr)\Bigl(\Delta_N Z^{(N)}\Bigl(\sum_i y_i\Bigr)+1\Bigr)\right]\right)\bigg|_{y=0} \\ &\qquad= \partial_{\alpha_0} Z\Bigl(\sum_i y_i\Bigr)\bigg|_0 = \alpha_0!\,Z_{\alpha_0},\end{aligned}$$

откуда получаем утверждение леммы.

5.2.6. *Завершение доказательства теоремы.* Осталось заметить, что случай любых дифференциальных соотношений сводится к случаю, разобранному выше. Действительно, вместо исходных соотношений можно рассмотреть конечный набор всевозможных их следствий вида

$$\partial_\beta \partial_{\gamma_i} z = \partial_\beta f_i(x, \partial_\alpha z),$$

где $|\beta| + |\gamma_i| = N$, N – достаточно большое (например, $N = \max_i |\gamma_i| + 1$) натуральное число. После этого преобразования мы получим набор дифференциальных соотношений вида (32). Формальный ряд $z(x)$ будет удовлетворять новой системе соотношений. Множество $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \setminus I$ дополнится конечным набором элементов, что не влияет на сходимость ряда $\tilde{z}(x)$, задающего укорочение ряда $z(x)$.

§ 6. Примеры и замечания

6.1. Об условиях, наложенных на упорядочивание $\prec$. Оказывается, что для построения формальных решений системы достаточно выполнения более слабого, чем условие а), условия

а$'$) для любого элемента α полугруппы верно неравенство $0 \prec \alpha$.

Все леммы об упорядоченной полугруппе и о свойствах отображения Грёбнера, используемые в настоящей работе, остаются верными и при замене условия а) на условие а$'$). В частности, при выполнении условия а$'$) упорядоченная полугруппа $(\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}, \preceq)$ есть вполне упорядоченное множество. Формулировка и доказательство теоремы 1 для этого случая не изменяются.

Как видно из следующего примера С. Ковалевской (см. [7] или [2]), условия а$'$) недостаточно для выполнения аналога теоремы 3. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,.$$

Легко построить порядок $\prec$, удовлетворяющий условиям а$'$) и б), при котором $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \prec \frac{\partial}{\partial y}$. Нетрудно проверить, что формальный ряд, построенный по начальным данным

$$z|_{y=y_0} = \phi(x),$$

где $\phi(x)$ – произвольная голоморфная функция, может иметь нулевой радиус сходимости.

6.2. Случай нескольких неизвестных функций. Важно отметить, что сформулированные теоремы существования и единственности формальных и аналитических решений системы несложно обобщаются на случай линейных систем с несколькими неизвестными функциями $z_1, \dots, z_p$.

Производные набора неизвестных функций $z_1, \dots, z_p$ параметризуются точками произведения $Z = \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \times \{1, \dots, p\}$. Пусть $\prec_{\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}}$ – некоторый порядок на полугруппе $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, удовлетворяющий условиям а) и б) из п. 2.1. Рассмотрим следующий полный порядок $\prec$ на множестве Z. Для любых элементов (α, i) и (β, j) множества Z сравниваются элементы α и β полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ с помощью упорядочивания $\prec_{\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}}$; если они совпадают, сравниваются (как целые числа) номера i и j. В этом случае можно произвести построения, аналогичные сделанным в настоящей работе, и доказать прямые аналоги теорем 1–4.

6.3. О пространстве решений в точках “плохой” гиперповерхности Σ. Описанная выше техника позволяет исследовать пространства формальных и (ростков) аналитических решений системы в точках дополнения к некоторой аналитической гиперповерхности Σ (см. п. 4.2). Следующий пример показывает, что пространства формальных и аналитических решений системы в некоторых точках гиперповерхности Σ могут быть “устроены” иначе, чем для точек дополнения к гиперповерхности Σ.

Рассмотрим уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0,$$

где a_i – некоторые целые числа. “Плохая” гиперповерхность Σ в данном случае есть, в зависимости от выбора упорядочивания $\prec$, одна из гиперплоскостей $x_i = 0$. При подходящем выборе коэффициентов a_i нетрудно показать, что для точки 0, принадлежащей гиперповерхности Σ, доказанные теоремы 1–4 не выполняются. В частности, функция $H(0,i)$ может не быть полиномиальной на множестве достаточно больших натуральных чисел.

6.4. Алгебраический смысл функции Гильберта системы. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$ с координатами $\xi_1,\dots,\xi_n$. Напомним, что главный символ системы – это семейство $M(u)$ алгебраических многообразий (точнее, идеалов в кольце многочленов $\mathbb{C}[\xi_1,\dots,\xi_n]$), где параметр u принадлежит области U. Семейство $M(u)$ задается следующим образом. Для каждого оператора

$$D_i = \sum_{\alpha\in\operatorname{supp} D_i} d_\alpha \partial_\alpha, \tag{40}$$

стоящего в левой части i-го уравнения системы (8), рассмотрим семейство однородных многочленов

$$\widetilde{D}_i(u,\xi) = \sum_{\substack{\alpha\in\operatorname{supp} D_i\\ |\alpha|=r(D_i)}} d_\alpha(u)\xi^\alpha, \tag{41}$$

где через ξ^α обозначен моном $\xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n}$, а $r(D_i)$ – порядок оператора D_i. Семейство $M(u)$ является семейством идеалов в кольце многочленов $\mathbb{C}[\xi_1,\dots,\xi_n]$, порожденных всеми многочленами $\widetilde{D}_i$.

Используя конструкцию базисов Грёбнера, нетрудно доказать следующее утверждение о функции Гильберта системы (8).

Предложение 8. *Для любой точки $u\in U\setminus\Sigma$ и любого неотрицательного целого i выполнено равенство*

$$H_{M(u)}(i) = H(u,i), \tag{42}$$

где через $H_{M(u)}$ обозначена функция Гильберта алгебраического многообразия $M(u)$.

Список литературы

1. Riquier C., *Les systèmes d'èquations aux derivées partielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1910.
2. Фиников С. П., *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Теория совместности систем дифференциальных уравнений в полных дифференциалах и в частных производных*, Гостехиздат, М.–Л., 1948.
3. Паламодов В. П., "Дифференциальные операторы в классе сходящихся степенных рядов", *Функцион. анализ и его прилож.*, **2**:3 (1968), 58–69.
4. Зайцева М. И., "О совокупности упорядочений абелевой группы", *УМН*, **8**:1 (1953), 135–137.
5. Trevisan G., "Classificazione dei semplici ordinamenti di un gruppo libero commutativo con N generatori", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **22** (1953), 143–156.
6. Хованский А. Г., "Суммы конечных множеств, орбиты конечных полугрупп и функции Гильберта", *Функцион. анализ и его прилож.*, **29**:2 (1995), 36–50.
7. Kowalevsky S., "Zür Theorie der partiellen Differentialgleichungen", *J. für Math.*, **20** (1875), 1.

А. Г. Хованский (A. G. Khovanskii)
Институт системного анализа РАН
E-mail: askold@math.toronto.edu

Поступило в редакцию
08.09.2003

С. П. Чулков (S. P. Chulkov)
Независимый московский университет
E-mail: chulkov@mccme.ru