Математические заметки

Том 91 выпуск 3 март 2012

УДК 514.172.4

Пополнения выпуклых семейств выпуклых множеств

А. Г. Хованский

В заметке обсуждается вопрос о существовании непрерывного продолжения функций, определенных на подмножествах в $\mathbb{R}^n$, значениями которых являются выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$. Этот вопрос выпуклой геометрии возник в связи с недавно введенным в алгебраической геометрии понятием выпуклого тела Ньютона.

Библиография: 2 названия.

Экспоненту, определенную в рациональных точках $x = p/q$ формулой $\exp x = \sqrt[q]{e^p}$, можно по непрерывности продолжить на всю вещественную прямую. Это простейший пример эффекта, которому посвящена настоящая статья. Пусть каждой целочисленной точке m в положительном октанте $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ сопоставлено компактное выпуклое тело $\delta_m \subset \mathbb{R}^k$, причем отображение $m \to \Delta_m$ обладает следующими свойствами:

1) тело $\Delta_{m_1+m_2}$ содержит сумму Минковского $\Delta_{m_1} + \Delta_{m_2}$ тел Δ_{m_1} и Δ_{m_1};
2) для $q \geqslant 0$ и $m \in \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ выполняется равенство $\Delta_{qm} = q\Delta_m$;
3) на $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ существует непрерывная однородная степени k функция ϕ, положительная на множестве $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0} \setminus \{0\}$ и такая, что k-мерный объем тела Δ_m равен $\phi(m)$ (функцию ϕ, удовлетворяющую свойству 3), мы будем называть *функцией объема.*)

Вопрос: можно ли при перечисленных условиях продолжить по непрерывности на весь октант $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ отображение, сопоставляющее целочисленной точке $m \in \mathbb{R}^k_{\geqslant 0}$ тело Δ_m? Точнее, *существует ли в пространстве $\mathbb{R}^n + \mathbb{R}^k$ замкнутый выпуклый конус K такой, что для всякой целочисленной точки $m \in \mathbb{R}^n_+$ выполняется равенство $\Delta_m = \pi^{-1}(m) \cap K$*, где $\pi\colon (\mathbb{R}^n + \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^n$ – естественная проекция.

В статье показывается, что ответ положителен (см. п. 8). Здесь существенную роль играет вспомогательное свойство 3) – если оно не выполнено, то ответ отрицателен. В статье получено также аналогичное, но более громоздкое, описание отображений $m \to \Delta_m$, удовлетворяющих лишь свойствам 1) и 2).

Поставленный вопрос мотивирован алгебраической геометрией и связан с недавно введенным понятием выпуклого тела Ньютона (см. статью [1], в которой можно найти конструкцию тела Ньютона и ссылки на другие работы на эту тему). Настоящая статья не опирается на алгебраическую геометрию и никак ее не использует. Для полноты картины в следующем абзаце мы кратко прокомментируем

Работа выполнена при поддержке канадского гранта № 156833-2.

алгебро-геометрическую ситуацию, в которой возникает этот вопрос. Следующий абзац можно опустить без ущерба для понимания статьи.

Пусть X – произвольное k-мерное неприводимое комплексное алгебраическое многообразие, $\mathbb{C}(X)$ – поле рациональных функций на X и $\mathbf{K}_{\mathrm{rat}}(X)$ – множество всех ненулевых конечномерных пространств над $\mathbb{C}$ рациональных функций на X. В $\mathbf{K}_{\mathrm{rat}}(X)$ есть естественное умножение, превращающее это множество в коммутативную полугруппу. Фиксируем любое $\mathbb{Z}^k$-значное нормирование v на поле $\mathbb{C}(X)$ такое, что каждая точка $q \in \mathbb{Z}^k$ представима в виде $q = v(f)$, где f – некоторая ненулевая функция из поля $\mathbb{C}(X)$. В статье [1] описывается конструкция, сопоставляющая каждому пространству $L \in \mathbf{K}_{\mathrm{rat}}(X)$ ее выпуклое тело Ньютона $\Delta(L) \subset \mathbb{R}^k$ (тело $\Delta(L)$ зависит от нормирования v). Умноженный на $k!$ объем $V(\Delta(L))$ тела $\Delta(L)$ отвечает за асимптотику размерности над полем $\mathbb{C}$ степеней пространства, а именно,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{C}} L^N}{N^k} = k!V(\Delta(L)),$$

и удовлетворяет следующим условиям:

1) $\Delta(L_1L_2) \supset \Delta(L_1) + \Delta(L_2)$;

2) для $q \geqslant 0$ справедливо равенство $\Delta(L^q) = q\Delta(L)$.

Пусть $L_1, \dots, L_n$ – произвольные элементы из $\mathbf{K}_{\mathrm{rat}}(X)$, $m = (m_1, \dots, , m_n)$ – целая точка из положительного октанта $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ и $L(m) = L^{m_1} \cdots L^{m_n}$. Тогда отображение $m \to \Delta(m) = \Delta(L(m))$ удовлетворяет условиям 1) и 2) из первого пункта настоящего введения. Кроме того, как видно из статьи [1], функция $\phi(m) = V(\Delta(L(m))$ на множестве целых точек октанта $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ является однородным полиномом степени k. Возникает естественная задача: что можно сказать о теле $\Delta(m)$ как функции точки m? Эта задача и мотивировала вопрос, обсуждаемый в настоящей статье.

В статье развивается аппарат, связанный с рассматриваемым вопросом. Мы вводим понятие *выпуклости* семейства выпуклых тел, расположенных на заданном семействе параллельных аффинных пространств в $\mathbb{R}^N$. Пусть фиксировано векторное подпространство $V \subset \mathbb{R}^N$ и задано некоторое множество аффинных пространств $\{V_\alpha\}$, параллельных подпространству V. Множество $\{V_\alpha\}$ удобно описывать следующим образом. Пусть $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n + V$ и $\pi \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ – проекция вдоль пространства V. Для описания семейства $\{V_\alpha\}$ достаточно задать проекцию $\pi(M) \subset \mathbb{R}^n$ множества $M = \cup V_\alpha$. На протяжении всей статьи мы будем пользоваться именно таким описанием. Пусть в каждом пространстве V_α фиксировано (возможно пустое) выпуклое множество Δ_α. Скажем, что $\{\Delta_\alpha\}$ является *выпуклым семейством выпуклых множеств*, если существует выпуклое множество $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ такое, что $\Delta_\alpha = \Delta \cap V_\alpha$.

Обсуждаются следующие вопросы. Является ли заданное семейство $\Delta_\alpha \subset V_\alpha$ выпуклых множеств выпуклым? Если "да", то что можно сказать о выпуклом множестве Δ, для которого $\Delta_\alpha = \Delta \cap V_\alpha$? Например, каким можно выбрать Δ, если слои Δ_α замкнуты?

О расположении материала. В п. 1 приводятся нужные нам классические определения и теоремы выпуклой геометрии.

Понятия выпуклости ($\mathbb{F}$-выпуклости, $\mathbb{Q}$-выпуклости) множества над своей проекцией, являющиеся версиями понятия выпуклости семейства множеств, обсуждаются в пп. 2 и 3. Характеристический конус – инвариант, позволяющий различать ограниченные и неограниченные выпуклые тела, обсуждается в пункте 5.

В пп. 4, 6 и 7 доказаны результаты, нужные для решения поставленной задачи. В п. 4 показывается, что для выпуклого множества Δ операция пересечения с аффинным подпространством V и операция замыкания коммутируют, если V пересекает внутренность множества Δ. В п. 6 рассматриваются сечения выпуклого тела Δ семейством параллельных аффинных пространств. Обсуждается вопрос о непрерывной зависимости сечения от секущего пространства. В п. 7 классифицируются все выпуклые множества Δ, проектирующиеся в заданный многогранник P (в статье под словом "многогранник" мы подразумеваем замкнутый, ограниченный, выпуклый многогранник). Приводится достаточное условие компактности множества Δ, основанное на рассмотрении объема сечений.

В п. 8 решается задача об описании *полугрупп выпуклых тел над полугруппой* T *в* $\mathbb{R}^n$, для полугруппы $T=\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ и для полугруппы $T=\mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$, где $\mathbb{F}$ – подполе вещественных чисел. Для полугруппы $T=\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ эта задача совпадает со сформулированной выше задачей, пришедшей из алгебраической геометрии. Решение основано на результатах предыдущих пунктов.

Методы настоящей работы иллюстрируются еще на одном примере. В п. 9 определяются выпуклые функции на множестве $X\subseteq\mathbb{R}^n$. Обсуждается непрерывность таких функций и конструкция их выпуклого продолжения на выпуклую оболочку множества X. Простейший пример применения конструкции из п. 9 – продолжение экспоненты s рациональных чисел на вещественные.

Каждый из девяти пунктов статьи снабжен кратким введением. В заголовке каждого утверждения указано, о чем оно. Нумерация утверждений в статье сплошная.

1. Общие свойства выпуклых множеств. В этом пункте мы приводим нужные нам классические определения и теоремы из выпуклой геометрии (см., например, [2]).

Выпуклым подмножеством в векторном пространстве называется множество, которое с любыми двумя своими точками A и B содержит соединяющий их отрезок $[A,B]$. Выпуклое подмножество может быть незамкнутым и неограниченным. Пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством. Минимальное выпуклое множество $\mathbb{L}Y$, содержащее заданное множество Y, называется *выпуклой оболочкой* множества Y. Подмножество Δ_* *внутренних точек* выпуклого множества Δ – это подмножество внутренних точек в Δ относительно топологии минимального аффинного пространства, содержащего Δ. Например, множество I_* для отрезка $I\subset\mathbb{R}^n$ – это множество всех точек отрезка I, кроме его концов.

Первая теорема отделимости. *Пусть Δ – замкнутое выпуклое подмножество (возможно, неограниченное) в $\mathbb{R}^n$ и $a\in\mathbb{R}^n$ – точка, не лежащая в подмножестве Δ. Тогда существует ненулевая линейная функция $L\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ такая, что для каждой точки $x\in\Delta$ выполнено неравенство $L(x)<L(a)$.*

Теорема о границе выпуклого множества. *Каждая граничная точка выпуклого множества $X\subset\mathbb{R}^n$ является граничной точкой множества внутренних точек дополнения $\mathbb{R}^n\setminus X$.*

Вторая теорема отделимости. *Пусть Δ – выпуклое подмножество (возможно неограниченное и незамкнутое) в $\mathbb{R}^n$ и $a\in\mathbb{R}^n$ – точка, не лежащая в подмножестве Δ. Тогда существует ненулевая линейная функция $L\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ такая, что для каждой точки $x\in\Delta$ выполнено неравенство $L(x)\leqslant L(a)$.*

Вторая теорема отделимости вытекает из первой и из теоремы о границе выпуклого множества. Мы будем использовать вторую теорему отделимости в форме следующего следствия.

Следствие 1 (об отделимости от подпространства). *Пусть* $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ *– выпуклое подмножество* (*возможно*, *неограниченное и незамкнутое*) *и* $M \subset \mathbb{R}^n$ *– аффинное подпространство*, *не пересекающее подмножества* Δ. *Тогда существует ненулевая линейная функция* $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *такая*, *что для каждой пары точек* $x \in \Delta$, $y \in M$ *выполнено неравенство* $L(x) \leqslant L(y)$.

Доказательство. Рассмотрим фактор-пространство $\mathbb{R}^n/\overline{M}$ пространства $\mathbb{R}^n$ по векторному подпространству $\overline{M}$, полученному параллельным переносом аффинного пространства M. Пусть $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\overline{M}$ – естественная проекция, $\overline{\Delta} \subset \mathbb{R}^n/\overline{M}$ – образ выпуклого множества Δ и $a \in \mathbb{R}^n/\overline{M}$ – образ аффинного подпространства M. По второй теореме отделимости существует ненулевая линейная функция $\overline{L}\colon \mathbb{R}^n/\overline{M} \to \mathbb{R}$ такая, что $\overline{L}(\overline{x}) \leqslant \overline{L}(a)$ для всякой точки $\overline{x} \in \mathbb{R}^n/\overline{M}$. Функция $\pi^*L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по построению обладает требуемым свойством.

Нам понадобится также следующая классическая теорема Каратеодори.

Теорема Каратеодори. *Выпуклая оболочка подмножества* X *пространства* $\mathbb{R}^N$ *– объединение тетраэдров размерности* $\leqslant N$, *вершины которых содержатся в множестве* X.

2. Множества, выпуклые над своей проекцией. В этом пункте определяется выпуклость множества над его проекцией. Это определение эквивалентно определению выпуклости семейства множеств и является его упрощением в духе теоремы Каратеодори (см. теорему 3 о выпуклой оболочке). Теорема 5 связывает вопрос о плотности множества Δ в своей выпуклой оболочке с аналогичным вопросом о проекции множества Δ.

Первый из интересующих нас вопросов можно сформулировать так. Пусть $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ – стандартная проекция пространства $\mathbb{R}^N$ на координатное подпространство $\mathbb{R}^n$, Y – подмножество в $\mathbb{R}^N$ и $X = \pi(Y) \subset \mathbb{R}^n$ – образ множества Y?

Вопрос 1. *Верно или неверно следующее утверждение*: *существует выпуклое множество* $R \subset \mathbb{R}^N$ *такое*, *что* $R \cap \pi^{-1}(X) = Y$?

Для ответа нам понадобится следующее определение.

Определение. Множество Y называется *выпуклым над своей проекцией* $X = \pi(Y)$, если:

1) прообраз $\pi^{-1}(x) \cap Y$ точки $x \in X$ – выпуклое множество;
2) если образы $\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)$ точек $a_1, \dots, a_k \in Y$ аффинно независимы (т.е. не содержатся в аффинном пространстве размерности $< k-1$), то точка $\Gamma \cap \pi^{-1}(x)$ принадлежит Y, где Γ – тетраэдр с вершинами в точках $a_1, \dots, a_k$ и x – любая точка множества $X \cap \pi(\Gamma)$.

Теорема 2 (ответ на вопрос 1). *Ответ положителен*, *если и только если множество* Y *выпукло над своей проекцией*.

Очевидно, что если искомое выпуклое тело R существует, то множество Y выпукло над своей проекцией.

Если искомое множество R существует, то в качестве R можно взять выпуклую оболочку $\mathbb{L}Y$ множества Y. Действительно, из включений $Y \subset \mathbb{L}Y \subset R$ и равенства $\pi^{-1}(x) \cap Y = \pi^{-1}(x) \cap R$ вытекает равенство $\pi^{-1}(x) \cap Y = \pi^{-1}(x) \cap \mathbb{L}V$. Поэтому теорема 2 сводится к следующей теореме о выпуклой оболочке.

Теорема 3 (о выпуклой оболочке). *Пусть подмножество Y пространства $\mathbb{R}^N$, снабженного проекцией $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$, выпукло над $X = \pi(Y)$. Тогда пересечение выпуклой оболочки $\mathbb{L}Y$ множества Y с множеством $\pi^{-1}(X)$ совпадает с множеством Y.*

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится лемма о сечениях выпуклых многогранников. Для выпуклого многогранника Δ и точки $A \in \Delta$ обозначим через Δ_A грань многогранника Δ, для которой точка A является внутренней точкой (Δ_A может совпадать с Δ).

Лемма 4 (о вершинах сечения выпуклого многогранника). *Пусть Δ – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^N$, $\Gamma = M \cap \Delta$ – сечение многогранника аффинным подпространством M размерности n и A – вершина многогранника Γ. Тогда минимальное аффинное пространство L_A, содержащее грань Δ_A многогранника Δ, пересекает пространство M лишь по точке A. В частности, размерность пространства L_A не больше, чем $(N - n)$.*

Доказательство. Если пересечение $L_A \cap M$ имеет положительную размерность, то, так как точка A является внутренней точкой грани Δ_A, точка A является внутренней точкой пересечения $L_A \cap M$. Следовательно, точка A никак не может быть вершиной многогранника $\Delta \cap M$. Противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы 3. По теореме Каратеодори для получения выпуклой оболочки множества Y достаточно взять объединение тетраэдров Γ размерности $\leqslant N$ с вершинами в множестве Y. Нам нужно показать, что для каждой точки $x \in X$ тетраэдр Γ, вершины которого лежат в множестве Y, пересекает подпространство $\pi^{-1}(x)$ по подмножеству выпуклого множества $Y \cap \pi^{-1}(x)$. Согласно лемме о вершинах сечения выпуклого многогранника каждая вершина A многогранника $\Gamma \cap \pi^{-1}(x)$ является пересечением пространства $\pi^{-1}(x)$ с гранью Γ_A многогранника Γ, которая взаимнооднозначно отображается на свой образ при проекции π. Размерность грани Γ_A не больше чем n, ее вершины лежат в множестве Y. Так как Y выпукло над $\pi(Y)$, каждая вершина A многогранника $\Gamma \cap M$ принадлежит множеству Y. В силу выпуклости множества $Y \cap \pi^{-1}(x)$ многогранник $\Gamma \cap \pi^{-1}(x)$ принадлежит множеству Y, что и требовалось доказать.

Итак, мы доказали теорему 3 и вместе с ней теорему 2.

Теорема 5 (о плотности). *Пусть подмножество Y пространства $\mathbb{R}^N$, снабженного проекцией $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$, выпукло над $X = \pi(Y)$. Пусть множество X является всюду плотным подмножеством в своей выпуклой оболочке $\mathbb{L}X$. Тогда множество Y всюду плотно в своей выпуклой оболочке $\mathbb{L}Y$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что множество $\mathbb{L}X$ имеет размерность n. Каждая точка множества $\mathbb{L}Y$ содержится в некотором симплексе Γ с вершинами в множестве Y, который взаимнооднозначно отображается на свой образ при проекции π. Так как множество X плотно в n-мерном множестве

$\mathbb{L}X$, симплекс Γ является гранью некоторого n-мерного симплекса $\widetilde{\Gamma}$ с вершинами в множестве Y, который взаимнооднозначно отображается на свой образ при проекции π. Так как множество X плотно в множестве $\mathbb{L}X$, множество $X \cap \pi(\widetilde{\Gamma})$ плотно в множестве $\pi(\widetilde{\Gamma})$. Поэтому симплекс $\widetilde{\Gamma}$ лежит в замыкании множества Y.

3. Множества, F-выпуклые над своей проекцией. Пусть $\mathbb{F}$ – некоторое подполе поля вещественных чисел. Точки множества $\mathbb{F}^n \subset \mathbb{R}^n$ будем называть $\mathbb{F}$-*точками в* $\mathbb{R}^n$. В этом пункте мы упрощаем определение выпуклости множества над своей проекцией в случае, когда проекция – множество всех $\mathbb{F}$-точек выпуклого множества. Для $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ это определение поддается дальнейшему упрощению.

Определение. Скажем, что множество $Y \subset \mathbb{R}^N$ является $\mathbb{F}$-*выпуклым над своей проекцией*, если

1) $\pi(Y)$ состоит из всех $\mathbb{F}$-точек некоторого выпуклого множества в $\mathbb{R}^n$;
2) для точки $x \in \pi(Y)$ множество $Y_x = \pi^{-1}(x) \cap Y$ выпукло;
3) если точки $a, b \in Y$ имеют различные проекции и $\lambda \in \mathbb{F}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то точка $\lambda a + (1-\lambda)b$ лежит в Y.

Теорема 6 (об $\mathbb{F}$-выпуклости). *Пусть Y – подмножество пространства $\mathbb{R}^N$, снабженного проекцией $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$. Тогда*

1) *если множество Y является $\mathbb{F}$-выпуклым над своей проекцией, то множество Y выпукло над своей проекцией;*
2) *если множество Y выпукло над своей проекцией и его образ $\pi(Y)$ состоит из всех $\mathbb{F}$-точек некоторого выпуклого множества, то множество Y является $\mathbb{F}$-выпуклым над своей проекцией.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7 (о симплексе). *Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ – $\mathbb{F}$-точка, лежащая строго внутри $(k-1)$-мерного симплекса, вершины $A_1, \dots, A_k$ которого – $\mathbb{F}$-точки, и $k > 2$. Тогда на ребре $[A_1, A_2]$ существует $\mathbb{F}$-точка B такая, что точка x – внутренняя точка $(k-2)$-мерного симплекса с вершинами $B, A_3, \dots, A_k$.*

Доказательство леммы 7. В качестве точки B нужно взять пересечение ребра $[A_1, A_2]$ с $(k-2)$-мерным аффинным пространством, натянутым на точки x, $A_3, \dots, A_k$.

Доказательство теоремы 6. Чтобы доказать пункт 1), достаточно проверить, что если образы $\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)$ набора из k точек $a_1, \dots, a_k \in Y$ аффинно независимы, то $\Gamma \cap \pi^{-1}(x) \in Y$, где Γ – тетраэдр с вершинами в точках $a_1, \dots, a_k$ и x – любая точка множества $\pi(Y) \cap \pi(\Gamma)$. Для $k = 2$ это свойство включается в определение множества, $\mathbb{F}$-выпуклого над своей проекцией. Пусть утверждение уже доказано для всех наборов точек множества Y, содержащих меньше, чем k точек. По условию, точки $\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)$ и точка x являются $\mathbb{F}$-точками. По лемме 7 на отрезке $[\pi(a_1), \pi(a_2)]$ существует $\mathbb{F}$-точка B такая, что точка x является внутренней точкой симплекса с вершинами $B, \pi(a_3), \dots, \pi(a_k)$. По определению множества, $\mathbb{F}$-выпуклого над своей проекцией, единственная точка $\overline{B}$ пересечения отрезка $[a_1, a_2]$ и пространства $\pi^{-1}(B)$ лежит в выпуклом теле $Y \cap \pi^{-1}(B)$. По индукционному предположению единственная точка пересечения симплекса $\overline{\Gamma}$ с вершинами $\overline{B}, a_3, \dots, a_k$ и пространства $\pi^{-1}(x)$ лежит в выпуклом множестве $Y_x = \pi^{-1}(x) \cap Y$.

Для завершения доказательства пункта 1) достаточно заметить, что симплекс $\overline{\Gamma}$ содержится в симплексе Γ и что $\Gamma \cap \pi^{-1}(x) = \overline{\Gamma} \cap \pi^{-1}(x)$. Пункт 2) теоремы очевиден.

Среди подполей $\mathbb{F}$ поля вещественных чисел выделяются поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$. Согласно теореме 6 любое выпуклое множество в $\mathbb{R}^N$ является $\mathbb{R}$-выпуклым множеством над своей проекцией. Определение $\mathbb{Q}$-выпуклости над своей проекцией можно чуть упростить.

Утверждение 8 (о $\mathbb{Q}$-выпуклости). *Для поля $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ в определении $\mathbb{F}$-выпуклости свойство* 3) *можно заменить следующим свойством*

3$'$) *если точки $a, b \in Y$ имеют различные проекции и n – натуральное число, то точка $a/n + (1 - 1/n)b$ лежит в Y.*

Доказательство. Надо показать, что если точки $a, b \in Y$ имеют различные проекции и $0 \leqslant p/q \leqslant 1$, то точка $pa/q + (1 - p/q)b$ лежит в Y. Пусть $c_i \in \mathbb{R}^N$, где $0 \leqslant i \leqslant p$ – точки, определенные соотношениями

$$c_0 = b, \qquad c_{j+1} = \frac{a}{q-j} + \biggl(1 - \frac{1}{q-j}\biggr)c_j.$$

Легко проверить, что

$$c_i = \frac{i}{q}\,a + \biggl(1 - \frac{i}{q}\biggr)b.$$

Точки c_i принадлежат Y. Действительно, $c_0 = b \in Y$. Если $c_j \in Y$, то в силу реккурентного соотношения $c_{j+1} \in Y$. Поэтому $c_p \in Y$. Утверждение доказано.

4. Замыкание сечения выпуклого множества. В этом пункте показывается, что для выпуклого множества Δ операция пересечения с аффинным подпространством и операция замыкания коммутируют, если аффинное подпространство пересекает внутренность множества Δ (см. теорему 9).

Пусть Y – подмножество пространства $\mathbb{R}^N$, снабженного стандартной проекцией $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ и $X \subset \mathbb{R}^n$ – образ множества Y при проекции π. Нас будет интересовать следующая модификация вопроса 1 из п. 2.

Вопрос 2. *Верно или неверно следующее утверждение*: *существует замкнутое выпуклое множество $V \subset \mathbb{R}^N$ такое, что $V \cap \pi^{-1}(X) = Y$?*

В вопросе 2 требуется, чтобы множество V было замкнуто. В вопросе 1 не требуется замкнутости множества R.

Если для множества Y ответ на вопрос 2 положителен, то очевидно, что в качестве множества V всегда *можно взять множество $\overline{\mathbb{L}Y}$ – замыкание выпуклой оболочки $\mathbb{L}Y$ множества Y*. Если для множества Y ответ на вопрос 2 положителен, то, в частности, для него положителен и ответ на вопрос 1. Поэтому *ответ на вопрос* 2 *может быть положителен лишь для множеств Y, удовлетворяющих следующим условиям*:

1) *множество Y должно быть выпуклым над своей проекцией*;
2) *все множества $Y_x = \pi^{-1}(x) \cap Y$ должны быть замкнутыми.*

Сформулированных условий недостаточно для положительного ответа на вопрос 2: множество $\pi^{-1}(a) \cap \overline{\mathbb{L}Y}$ может оказаться строго больше, чем множество $\pi^{-1}(a) \cap Y$, если точка a является граничной точкой множества $X = \pi(Y)$ (см. ниже пример 1). Однако, *при выполнении сформулированных условий для всех внутренних точек a множества $\pi(Y)$ выполняется равенство $\pi^{-1}(a) \cap \overline{\mathbb{L}Y} = \pi^{-1}(a) \cap Y$.* Этот факт вытекает из доказанной ниже теоремы 9 о замыкании сечения выпуклого множества.

Пример 1. Пусть $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ – стандартная проекция плоскости $\mathbb{R}^2$ на горизонтальную прямую $\mathbb{R}^1$ и множество $Y \subset \mathbb{R}^2$ есть $T \setminus (l_1 \cap l_2) \cup \{A\}$, где T – множество внутренних точек трапеции, основания l_1 и l_2 которой – вертикальные отрезки, и A – середина основания l_1. Множество Y выпукло над своей проекцией и имеет замкнутые слои. Пересечение прямой $\pi^{-1}(\pi(A))$ с замыканием множества Y – основание l_1, а пересечение этой прямой с множеством Y – точка A на основании l_1.

Пусть Δ – выпуклое подмножество (возможно, неограниченное и не замкнутое) пространства, снабженного стандартной проекцией $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$. Образ $\pi(\Delta)$ множества Δ является выпуклым подмножеством в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема 9 (о замыкании сечения выпуклого множества). *Пусть X – внутренняя точка выпуклого множества $\pi(\Delta)$. Тогда замыкание выпуклого множества $\Delta_x = \pi^{-1}(x) \cap \Delta$ совпадает с пересечением аффинного подпространства $\pi^{-1}(x)$ и замыкания выпуклого множества Δ.*

Замечание 1. Теорема допускает следующую переформулировку. *Пусть сечение Δ_M выпуклого множества Δ аффинным подпространством M содержит некоторую внутреннюю точку множества Δ. Тогда замыкание сечения Δ_M совпадает с сечением аффинным подпространством M замыкания выпуклого множества Δ.*

Замечание 2. В теореме предполагается, что точка x является внутренней точкой множества $\pi(Y)$. Без этого ограничения теорема неверна (см. пример 1 выше). В пункте 6 мы сформулируем условия, при выполнении которых теорема справедлива и для граничных точек $x \in \partial(\pi(\Delta))$.

Доказательство теоремы 9. Пусть точка c принадлежит аффинному подпространству $\pi^{-1}(x)$ и не лежит в замыкании множества Δ_x. По первой теореме отделимости в пространстве $\pi^{-1}(x)$ существует гиперплоскость V_x такая, что точка c лежит по одну сторону от V_x, а замыкание выпуклого тела Δ_x – по другую сторону. Аффинное пространство $V_x \subset \mathbb{R}^N$ целиком содержится в пространстве $\pi^{-1}(x)$ и не пересекается с телом Δ. По следствию 1 в $\mathbb{R}^N$ существует гиперплоскость V, содержащая пространство V_x такая, что тело Δ содержится в одном из двух замкнутых полупространств пространства $\mathbb{R}^N$, граница которых равна V.

Покажем, что пересечение гиперплоскости V с аффинным подпространством $\pi^{-1}(x)$ равно V_x. Так как по условию $V_x \subset V$, нужно проверить, что гиперплоскость V не может содержать пространство $\pi^{-1}(x)$. Действительно, в противном случае образ гиперплоскости V при отображении π будет проходить через внутреннюю точку x тела $\pi(\Delta)$. По построению тело $\pi(\Delta)$ должно лежать по одну сторону от этого сечения. Но по условию точка x – внутренняя точка тела $\pi(\Delta)$. Противоречие доказывает, что $\pi^{-1}(x) \cap V = V_x$.

Точка c не может лежать в замыкании тела Δ. Действительно, она лежит внутри одного полупространства с границей V, а тело Δ лежит в замыкании другого полупространства. Теорема доказана.

5. Характеристический конус некомпактного выпуклого тела. В этом пункте определяется характеристический конус – простой инвариант выпуклых тел, позволяющий различать ограниченные и неограниченные тела. С каждой точкой x (вообще говоря, неограниченного) выпуклого тела Δ свяжем следующее множество $K(x,\Delta)$: вектор v принадлежит множеству $K(x,\Delta)$, если для всякого $\lambda \geqslant 0$ вектор $x+\lambda v$ лежит в Δ. Непосредственно из определения выпуклости множества Δ вытекает следующее утверждение.

Утверждение 10 (о характеристическом конусе). *Для любой точки x любого выпуклого множества Δ множество $K(x,\Delta)$ является выпуклым конусом. Для различных внутренних точек $x_1, x_2 \in \Delta_*$ конусы $K(x_1,\Delta)$, $K(x_2,\Delta)$ совпадают.*

Характеристическим конусом выпуклого тела Δ назовем конус $K(\Delta)=K(x,\Delta)$ любой его внутренней точки x.

Утверждение 11 (критерий ограниченности). *Конус $K(\Delta)$ отличен от точки 0, если и только если множество Δ не ограничено. Конус $K(\Delta)$ выпуклого множества всегда замкнут.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что тело Δ имеет полную размерность. Для внутренней точки $x \in \Delta_*$ найдется шар B_r с центром в x, содержащийся в Δ. Если тело Δ неограничено, то существует последовательность y_i точек тела такая, что $\|y_i\| \to \infty$ и что последовательность векторов $(y_i-x)/\|(y_i-x)\|$ единичной сферы сходится к некоторому вектору v. Этот вектор лежит в конусе $K(x,\Delta)$. Действительно, с точкой y_i выпуклое тело Δ содержит выпуклую оболочку Y_i объединения шара B_r и точки y_i. Пусть l_i – пересечение множества Y_i с лучом l, состоящим из точек $x+\lambda v$, где $\lambda \geqslant 0$. Множества l_i лежат в Δ, а их объединение покрывает весь луч l. Поэтому $v \in K(x,\Delta)$.

Пусть вектор v – предельная точка единичных векторов $v_i \in K(x,\Delta)$. Тело Δ содержит цилиндрические тела $B_r + L_i$, где L_i – луч, состоящий из точек λv при $\lambda \geqslant 0$. Объединение множеств $B_r + L_i$ содержит луч $x+\lambda v$, где $\lambda \geqslant 0$. Поэтому конус $K(x,\Delta)$ замкнут.

Следствие 12 (об ограниченности). *Пусть Δ – выпуклое подмножество пространства $\mathbb{R}^N$, снабженного проекцией $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$. Пусть его образ $\pi(\Delta) \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное множество. Тогда множество $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ ограничено, если и только если для некоторой внутренней точки $x \in \pi(\Delta)$ множество $\Delta_x = \Delta \cap \pi^{-1}(x)$ ограничено.*

Доказательство. Покажем, что если множество Δ_x ограничено, то ограничено и множество Δ. Действительно, если Δ не ограничено, то конус $K(a,\Delta)$, где $a \in (\Delta_x)_*$, содержит ненулевые векторы. Так как замкнутый конус $a+K(a,\Delta)$ содержится в теле Δ и образ $\pi(\Delta)$ ограничен, то конус $(a+K(x,\Delta)) \cap \pi^{-1}(x)$ содержит вектора, отличные от точки a. Поэтому множество Δ_x не ограничено. Противоречие доказывает лемму.

6. Непрерывность сечений как функций параметра. Пусть Δ – замкнутое выпуклое множество пространства $\mathbb{R}^N$, снабженного стандартной проекцией $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$. Рассмотрим сечение $\Delta_x = \pi^{-1}(x) \cap \Delta$ множества Δ аффинным пространством $\pi^{-1}(x)$ как функцию точки $x \in \pi(\Delta)$. В этом пункте обсуждается следующий вопрос: верно ли, что сечение Δ_x непрерывно зависит от точки x?

Прежде всего, ответ на поставленный вопрос, если не вводить дополнительных ограничений, отрицателен (даже если ограничение проекции π на множество Δ является собственным отображением). Около граничной точки $a \in \partial(\pi(\Delta))$ сечение может меняться скачком.

Пример 2. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ – конус над кругом B_2, лежащим на горизонтальной плоскости $\mathbb{R}^2$, и пусть вершина O конуса расположена над некоторой точкой A граничной окружности ∂B_2. Образом конуса Δ при стандартной проекции $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ является круг B_2. Если $x \in \partial B_2$ и $x \neq A$, то $\Delta_x = \{x\}$. Сечение Δ_A равно отрезку $[O, A]$. Сечения в окрестности точки $A \in B_2$ разрывно зависит от точки круга B_2.

В примере $\pi(\Delta)$ – круг. Если $\pi(\Delta)$ – многогранник, то сечение Δ_x непрерывно зависит от точки $x \in \pi(\Delta)$.

Теорема 13 (о непрерывности сечений как функций параметра). *Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ замкнуто и выпукло и пусть $\pi(\Delta) \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник. Пусть для некоторой внутренней точки $x \in \pi(\Delta)$ сечение Δ_x ограничено. Тогда сечения Δ_x в метрике Хаусдорфа непрерывно зависят от точки $x \in \pi(\Delta)$.*

Доказательство. Согласно следствию 12 в условиях теоремы из ограниченности множества Δ_x вытекает компактность замыкания множества Δ. Для доказательства непрерывности функции Δ_x в точке $a \in \pi(\Delta)$ мы, во-первых, для каждой точки x из окрестности U точки a построим выпуклое множество V_x, непрерывно (и даже кусочно-линейно) зависящее от точки x и такое, что $V_x \subset \Delta_x$. Во-вторых, покажем, что функция, сопоставляющая точке x сечение Δ_x, полунепрерывна сверху.

1) *Нижняя оценка.* Построим семейство V_x. Триангулируем многогранник $\pi(\Delta)$ так, чтобы точка a была одной из вершин A_1 этой триангуляции. Рассмотрим замыкание $\overline{U}$ звезды U точки a относительно этой триангуляции. Замыкание $\overline{U}$ является объединением конечного числа симплексов, содержащих вершину $A_1 = a$. Определим кусочно-линейное отображение F множества $\overline{U}$ в множество выпуклых подмножеств тела Δ так, чтобы выполнялось включение $F(x) \subseteq \Delta_x$. Сначала определим F в вершинах A_i триангуляции. Для вершины $A_1 = a$ положим $F(A_1) = \Delta_a$. Для остальных вершин A_i при $i > 1$ положим $F(A_i) = C_i$, где C_i – любая точка в слое Δ_{A_i}. Доопределим отображение F по линейности в каждом симплексе триангуляции: если точка x лежит в симплексе множества $\overline{U}$ с вершинами $A_1 = a, A_2, \dots, A_k$ и

$$x = \lambda_1 A_1 + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k,$$

где $\sum \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$, то

$$F(x) = \lambda_1 \Delta_a + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_k C_k.$$

Для $x \in \overline{U}$ положим $V_x = F(x)$. Семейство V_x обладает нужными свойствами.

2) *Полунепрерывность сверху.* Для положительного числа ρ обозначим через B^1_ρ и B^2_ρ замкнутые шары радиуса ρ с центрами в началах координат пространства $\mathbb{R}^n$ и пространства $\mathbb{R}^{N-k}$ – ядра проекции $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество $\Delta_a + B^2_\varepsilon$. Граница Γ_ε множества $\Delta_a + B^2_\varepsilon$ является компактом, не пересекающимся с замкнутым множеством Δ. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что множество $\Gamma_\varepsilon + B^1_\delta + B^2_\delta$ не пересекается с множеством Δ. Для каждой точки x, лежащей в шаре $a + B^1_\delta$ радиуса δ с центром в точке a, сечение Δ_x содержится в перенесенном в пространство $\pi^{-1}(x)$ множестве $\Delta_a + B^2_\delta$ (т.е. содержится в множестве $\Delta_a + B^2_\delta + (x-a)$). Это доказывает полунепрерывность сверху сечения Δ_x как функции точки $x \in \pi(\Delta)$.

Теорема вытекает из доказанных пунктов 1), 2).

Скажем, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ *полиэдрально около точки* $a \in X$, если существует многогранник P и окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$ точки a такие, что $U \cap X = U \cap P$. Множество X полиэдрально около любой своей внутренней точки a. Замкнутый многогранный конус полиэдрален около любой своей точки. Из теоремы 13 непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие 14 (о полиэдральности и непрерывности). *Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ – замкнуто и выпукло и пусть $\pi(\Delta) \subset \mathbb{R}^n$ полиэдрально около некоторой точки $a \in \pi(\Delta)$. Пусть для некоторой внутренней точки $b \in \pi(\Delta)$ сечение Δ_b ограничено. Тогда сечения Δ_b в метрике Хаусдорфа непрерывно зависят от точки $x \in \pi(\Delta)$ в окрестности точки a.*

7. Выпуклые множества, проектирующиеся в многогранник. В этом пункте классифицируются все выпуклые множества Δ, проектирующиеся в заданный выпуклый многогранник P, такие, что прообраз в Δ каждой точки $x \in P$ является компактом. Классификация приведена ниже в теоремах 15 и 16. В следствии 18 приводится достаточное условие компактности множества Δ, основанное на рассмотрении объема сечений.

С каждым многогранником связано множество его граней. Мы подразумеваем, что сам многогранник является своей гранью.

Теорема 15 (о телах, выпуклых над многогранником). *Пусть Δ – выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^N$ и $\pi(\Delta) \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник. Пусть для $x \in \pi(\Delta)$ множество $\Delta_x = \Delta \cap \pi^{-1}(x)$ замкнуто, и пусть для некоторой внутренней точки $x \in \pi(\Delta)$ множество Δ_x ограничено. Тогда*

1) *замыкание Δ_Γ прообраза $\pi^{-1}(\Gamma)$ грани $\Gamma \subset \pi(\Delta)$ – выпуклый компакт;*
2) *если грань Γ_1 содержится в грани Γ_2, то $\Delta_{\Gamma_1} \subset \Delta_{\Gamma_2}$;*
3) *если x – внутренняя точка грани Γ, то $\pi^{-1}(x) \cap \Delta_\Gamma = \Delta_x$.*

Доказательство. Согласно следствию 12 в условиях теоремы из ограниченности множества Δ_x вытекает компактность замыкания множества Δ. По теореме 9 для каждой внутренней точки x множества $\pi(\Delta)$ множество Δ_x равно пересечению замыкания множества Δ с пространством $\pi^{-1}(x)$. Аналогично, для каждой внутренней точки x грани Γ множество Δ_x равно пересечению замыкания Δ_Γ прообраза $\pi^{-1}(\Gamma)$ грани $\Gamma \subset \pi(\Delta)$ с пространством $\pi^{-1}(x)$. Что и доказывает теорему.

Теорема 15 допускает обращение. Пусть $\mathbb{R}^N$ – пространство, снабженное стандартной проекцией $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$. Очевидна следующая теорема.

Теорема 16 (обращение теоремы 15). *Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник. Пусть для каждой грани $\Gamma \subseteq P$ задан выпуклый компакт $\Delta_\Gamma \subset R^N$ такой, что $\pi(\Delta_\Gamma) = \Gamma$, и если $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, то $\Delta_{\Gamma_1} \subset \Delta_{\Gamma_2}$. Тогда множество $\Delta = \bigcup(\Delta_\Gamma \cap \pi^{-1}(\Gamma)_*)$, где Γ_* – множество внутренних точек выпуклой граниТ, является выпуклым. Все слои $\Delta_x = \pi^{-1}(x) \cap \Delta$ замкнуты. Если x – внутренняя точка грани Γ, то $\Delta_x = \pi^{-1}(x) \cap \Delta_\Gamma$.*

Объем V – непрерывная функция на пространстве ограниченных выпуклых множеств, снабженном метрикой Хаусдорфа. Объем обладает следующим свойством строгой монотонности. Пусть $\Delta_2 \supset \Delta_1$ – неравные замкнутые выпуклые тела. Тогда если $V(\Delta_2) > 0$, то $V(\Delta_2) > V(\Delta_1)$ (если $V(\Delta_2) = 0$, то $V(\Delta_2) = V(\Delta_1)$).

В условиях теоремы 15 на многограннике $\pi(\Delta)$ определена функция ϕ, сопоставляющая точке $x \in \pi(\Delta)$ $(N-n)$-мерный объем $\phi(x)$ сечения Δ_x. Из теоремы 16 вытекает следующая теорема.

Теорема 17 (об объеме слоя). *Ограничение ϕ_{Γ_*} функции ϕ на множество Γ_* внутренних точек грани $\Gamma \subset \pi(\Delta)$ является непрерывной функцией (в частности, непрерывно ограничение ϕ_{Δ_*} функции ϕ_Δ на множество внутренних точек в Δ). Функция ϕ_{Γ_*} продолжается до непрерывной функции ϕ_Γ на всей грани Γ. Если $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, то $\phi_{\Gamma_1} \leqslant \phi_{\Gamma_2}$. Если для каждой грани Γ, содержащей точку a, выполняется равенство $\phi_\Gamma(a) = \phi(a)$ и $\phi(a) > 0$, то функция, сопоставляющая точке $x \in \pi(\Delta)$ сечение Δ_x, непрерывна в точке a.*

Следствие 18 (о непрерывности слоя и объема). *Пусть в условиях теоремы 16 функция объема ϕ непрерывна и положительна на всем многограннике P. Тогда множество Δ является компактом и слой Δ_x непрерывно зависит от точки $x \in P$.*

Определение. Множество $X \subset P$ *плотно в многограннике P и в его гранях*, если вершины многогранника P принадлежат X и для каждой грани $\Gamma \subseteq P$ (включая $\Gamma = P$) пересечение $X \cap \Gamma$ плотно в Γ.

Пример 3. Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник, все вершины которого являются $\mathbb{F}$-точками в $\mathbb{R}^n$. Тогда множество X всех $\mathbb{F}$-точек многогранника P плотно в многограннике P и в его гранях.

Наша ближайшая задача – классифицировать множества $\Delta \subset \mathbb{R}^N$, выпуклые над фиксированным множеством $X \subset P$, плотном в многограннике P и в его гранях, и имеющие компактные слои Δ_x над всеми точками $x \in X$. Формулируемые ниже теоремы сводят эту задачу к решенной выше задаче классификации в случае $X = P$.

Пусть множество $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ выпукло относительно проекции $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ над множеством X, плотном в многограннике P и в его гранях. С каждой гранью $\Gamma \subseteq P$ свяжем *множество $\widetilde{\Delta}_{\Gamma_*}$ – пересечение замыкания множества $\pi^{-1}(\Gamma_* \cap \Delta)$* с $\pi^{-1}(\Gamma_*)$, где Γ_* – внутренность грани Γ.

Определение. Множество $\cup\widetilde{\Delta}_{\Gamma_*} \subset \mathbb{R}^N$, равное объединению по всем граням $G \subseteq P$ (включая $G = P$) многогранника P множеств Δ_{Γ_*}, назовем *замыканием Δ над гранями многогранника P*.

Пусть множество $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ выпукло относительно проекции $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ над многогранником P и все сечения $\Delta_x = \Delta \cap \pi^{-1}(x)$ при $x \in P$ компактны.

Определение. Множество $\Delta \cap \pi^{-1}(X)$ назовем *ограничением* Δ *над* X.

Следующая теорема показывает, что операция замыкания над гранями многогранника P и операция ограничения над X устанавливают взаимнооднозначное соответствие между множествами Δ, выпуклыми над множеством X, плотном в многограннике P и его гранях, и аналогичными множествами для $X = P$.

Теорема 19 (о выпуклости над подмножеством многогранника). 1) *Если* Δ *выпукло над множеством* X, *плотном в многограннике* P *и его гранях, и имеет компактные слои, то замыкание множества* Δ *над гранями многогранника* P, *выпукло над* P *и имеет компактные слои.*

2) *Если* Δ *выпукло над* P *и имеет компактные слои, то его ограничение* $\Delta \cap \pi^{-1}(X)$ *над множеством* X, *плотном в многограннике* P *и его гранях, выпукло над* X *и имеет компактные слои.*

3) *Если* Δ *выпукло над множеством* X, *плотном в многограннике* P *и его гранях, то* $\bigl(\bigcup \widetilde{\Delta}_{\Gamma_*}\bigr) \cap \pi^{-1}(X) = \Delta$.

4) *Если* Δ *выпукло над* P *и имеет компактные слои, то* $\cup \widetilde{\Omega}_{\Gamma_*} = \Delta$, *где* $\Omega = \Delta \cap \pi^{-1}(X)$.

Доказательство. 1) Проверим, что множество $\bigcup \widetilde{\Delta}_{\Gamma_*}$ выпукло. С каждой гранью $\Gamma \subseteq$ свяжем замыкание в $\mathbb{R}^N$ линейной оболочки множества $\pi^{-1}(\Gamma) \cap \Delta$. По теореме 5 о плотности это множество равно замыканию $\widetilde{\Delta}_\Gamma$ множества $\pi^{-1}(\Gamma) \cap \Delta$. Следовательно, замкнутое множество $\widetilde{\Delta}_\Gamma$ выпукло. Если $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, то $\widetilde{\Delta}_{\Gamma_1} \subset \widetilde{\Delta}_{\Gamma_2}$. Поэтому множество $\bigcup \widetilde{\Delta}_{\Gamma_*}$, выпукло.

2) Очевидно.

3) Множество $\cup \widetilde{\Delta}_{\Gamma_*}$ совпадает с пересечением замыкания выпуклой оболочки множества $\pi^{-1}(\Gamma) \cap \Delta$ с множеством Δ (ср. с доказательством пункта 1)). Теперь нужный факт вытекает из теоремы о замыкании сечения, примененной к выпуклой оболочке множества $\pi^{-1}(\Gamma) \cap \Delta$.

4) Вытекает из пункта 3) теоремы 15.

8. Однородные полугруппы выпуклых тел. В этом пункте решается возникшая из алгебраической геометрии задача, сформулированная во введении к статье. Решается также вопрос об описании полугрупп выпуклых тел над полугруппой $\mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$ в $\mathbb{R}^n$. Все эти результаты – прямое следствие результатов предыдущих пунктов.

Пусть $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ – стандартная проекция и пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана некоторая аддитивная полугруппа T, содержащая точку 0. Для нас будут интересны следующие полугруппы T: $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ – полугруппа точек с неотрицательными целыми координатами; $\mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$ – полугруппа $\mathbb{F}$-точек с неотрицательными координатами в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, полугруппы $\mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$ и $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^N$ – подмножество такое, что его образ при проекции π совпадает с полугруппой T. Для каждой точки $a \in T$ обозначим через G_a множество $\pi^{-1}(a) \cap G$. Скажем, что множество G относительно проекции π является *однородной полугруппой выпуклых тел над полугруппой* T (или, короче, является *полугруппой над* T), если

1) для каждой точки $a \in T$ множество G_a выпукло;
2) для точки $0 \in T$ множество G_0 состоит из точки $0 \in \mathbb{R}^N$;

3) если $a \in T$ и $b = \lambda a$, где $\lambda \geqslant 0$, то $G_b = \lambda G_a$;
4) если $a, b \in T$ и $a + b = c$, то $G_a + G_b \subset G_c$ (другими словами, множество G является подгруппой в $\mathbb{R}^N$ относительно сложения).

Наша цель – описать однородные полугруппы выпуклых тел над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ и над $\mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$ (в частности, над $\mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$ и $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$). Описание полугрупп над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ сводится к описанию полугрупп над $\mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$.

Определение. 1) Пусть множество $G \subset \mathbb{R}^N$ относительно проекции $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ является полугруппой над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. Множество $\mathbb{Q}G \subset \mathbb{R}^N$, определенное условием $y \in \mathbb{Q}G$, если и только если существует натуральное k такое, что $ky \in G$, назовем *расширением G по однородности*.

2) Пусть множество $G \subset \mathbb{R}^N$ относительно проекции $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ является полугруппой над $\mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$. Множество $G\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^N$, равное $G \cap \pi^{-1}(\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0})$, назовем *ограничением G над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$*.

Следующая лемма показывает, что операция расширения по однородности и операция ограничения на $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ устанавливают взаимнооднозначное соответствие между полугруппами над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ и полугруппами над $\mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$.

Лемма 20 (о полугруппах над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ и над $\mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$). 1) *Если G – полугруппа над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, то ее расширение по однородности $\mathbb{Q}G$ – полугруппа над $\mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$.*

2) *Если G – полугруппа над $\mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$, то ее ограничение $G\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ – полугруппа над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$.*

3) *Если G – полугруппа над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, то $(\mathbb{Q}G)\mathbb{Z} = G$.*

4) *Если G – полугруппа над $\mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$, то $\mathbb{Q}(G\mathbb{Z}) = G$.*

Лемма сводится к простой проверке и мы не будем останавливаться на ее доказательстве.

Лемма 21 (полугруппы над $\mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$ и $\mathbb{F}$-выпуклость). *Множество $G \subset \mathbb{R}^N$ – полугруппа над $\mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$, если и только если*
1) *множество G является $\mathbb{F}$-выпуклым над $\pi(G)$;*
2) $\pi(G) = \mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$;
3) $\pi^{-1}(0) \cap G = 0 \in \mathbb{R}^N$;
4) *если $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \geqslant 0$ и $x \in G$, то $\lambda x \in G$.*

Доказательство. Пусть множество $G \subset \mathbb{R}^N$ является полугруппой выпуклых тел над полугруппой $\mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$. По определению множество G удовлетворяет условиям 2)–4). Проверим, что оно удовлетворяет условию 1). Пусть x, y – различные точки полугруппы $\mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$, и пусть точка $z \in \mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$ лежит внутри отрезка $[x, y]$. Пусть A и B – любые точки из множеств G_x и G_y и C – точка пересечения отрезка $[A, B]$ с пространством $\pi^{-1}(z)$. Докажем, что точка C лежит в множестве G_z. Пусть $\lambda \in \mathbb{F}_+$ – число, определенное соотношением $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. В силу однородности справедливы включения $\lambda A \in G_{\lambda x}$ и $(1-\lambda)B \in G_{(1-\lambda)y}$. По определению полугруппы выпуклых тел точка $C = \lambda A + (1-\lambda)B$ лежит в множестве $G_z = G_{\lambda x + (1-\lambda)y}$.

Пусть множество G удовлетворяет свойствам 1)–4). Покажем, что G является однородной полугруппой выпуклых тел над полугруппой $\mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$. Надо проверить только, что если $x, y \in G$, то $x + y$ принадлежит G. Сначала покажем, что точка

$u = (x+y)/2$, являющаяся серединой отрезка $[x, y]$, принадлежит G. Действительно, если $\pi(x) = \pi(y) = a$, то нужное включение вытекает из выпуклости слоя G_a. Если $\pi(x) \neq \pi(y)$, то $\pi(u)$ является серединой отрезка $[\pi(x), \pi(y)]$ и точка $u \in G$, так как множество G выпукло над $\mathbb{F}$-точками. Далее, $x + y = 2u$, и точка $x + y$ принадлежит G в силу условия однородности.

Следствие 22 (о полугруппах над $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$). *Множество $G \subset \mathbb{R}^N$ – полугруппа над $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$, если и только если*

1) G – *выпуклый конус*;
2) $\pi(G) = \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$;
3) $\pi^{-1}(0) \cap G = 0 \in \mathbb{R}^N$.

Скажем, что полугруппа G выпуклых тел над полугруппой T является *полугруппой с компактными слоями*, если для каждой точки $x \in T$ множество $G_x = G \cap \pi^{-1}(x)$ компактно.

Утверждение 23 (об описании полугрупп над $\mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$). *Описание полугрупп G с компактными слоями над $\mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$ сводится к описанию множеств Δ выпуклых над множеством $\mathbb{F}$-точек стандартного $(n-1)$-мерного симплекса в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть P – стандартный $(n-1)$-мерный симплекс в $\mathbb{R}^n$, вершины которого – стандартные базисные векторы в $\mathbb{R}^n$. Если G – полугруппа над $\mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$, то множество $\Delta = G \cap \pi^{-1}(P)$ выпукло над множеством $\mathbb{F}$-точек симплекса P. Обратно, пусть Δ выпукло над множеством $\mathbb{F}$-точек симплекса P. Для ненулевой точки $a \in \mathbb{F}^n$ положим $\lambda = (a_1 + \dots + a_n)$ и $G_a = \lambda\pi(a/\lambda) \cap \Delta$. Положим также $G_0 = 0$. Объединение G множеств G_a является полугруппой над $\mathbb{F}^n$. Эти факты вытекают из свойства однородности полугруппы G из леммы 21. Очевидно, что различным множествам Δ соответствуют различные полугруппы G и наоборот. Полугруппа G является полугруппой с компактными слоями, если и только если все множества $\Delta_x = \pi^{-1}(x) \cap \Delta$, $x \in P$ компактны.

Задача описания полугрупп с компактными слоями над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ и над $\mathbb{F}^n_{\geqslant 0}$ решена. Сформулируем подробно ответ для $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, поскольку именно этот случай интересен для алгебраической геометрии.

С каждым подмножеством J множества $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ свяжем в пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_1, \dots, x_n$ координатное подпространство R_j, определенное уравнениями $x_i = 0$, если $i \notin J$. Пусть пространство $\mathbb{R}^N$ снабжено стандартной проекцией $\pi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$.

Определение. Пусть каждому множеству $J \subseteq I_n$ сопоставлен конус $\Delta_J \subseteq \mathbb{R}^N$. Скажем, что набор конусов $\{\Delta_J\}$ является *согласованным*, если выполняются следующие условия:

1) для каждого J ограничение $\pi\colon \Delta_J \to \mathbb{R}_J$ проекции π на конус Δ_J является собственным отображением конуса Δ_J на координатное подпространство $\mathbb{R}_J$.
2) если $J_1 \subset J_2$, то $\Delta_{J_1} \subset \Delta_{J_2}$.

Теорема 24 (о полугруппах с компактными слоями над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$). 1) *Каждому согласованному набору конусов Δ_J можно сопоставить полугруппу G с компактным слоем над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, определенную соотношением: слой G_m полугруппы над точкой*

$m \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ равен $\pi^{-1}(m) \cap \Delta_J$, где J – минимальное подмножество такое, что $m \in \mathbb{R}_J$.

2) *Сопоставление из* 1) *задает взаимнооднозначное соответствие между согласованными наборами конусов и полугруппами с компактными слоями над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$.*

Полугруппы с компактными слоями над $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$, интересные с точки зрения алгебраической геометрии, допускают более простое описание. Дело в том, что объем слоев этой полугруппы над точкой $m \neq 0$ положителен и функция продолжается по непрерывности на весь положительный октант.

Определение. Скажем, что полугруппа G над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ *контролируема*, если полугруппа имеет компактные слои и на пространстве $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ существует непрерывная *контролирующая функция* ϕ такая, что

1) для $a \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ значение $\phi(a)$ равно $(N-n)$-мерному объему тела G_a;
2) для $x \in \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ и $\lambda \geqslant 0$ выполняется равенство $\phi(\lambda x) = \lambda^{N-n}\phi(x)$;
3) для $x \in \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ при $x \neq 0$ выполняется неравенство $\phi(x) > 0$.

Определение. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^N_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$ – непрерывная однородная функция степени $(N-n)$, положительная всюду, кроме точки 0. Конус $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ согласован с функцией ϕ, если выполняются следующие условия:

1) проекция $\pi\colon \Delta \to \mathbb{R}^n$ является собственным отображением на $\mathbb{R}^n$;
2) $(N-n)$-мерный объем слоя $\Delta_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^N_{\geqslant 0}$ равен $\phi(x)$.

Теорема 25 (о контролируемых полугруппах над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$). 1) *Каждому согласованному с функцией ϕ конусу $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ можно сопоставить контролируемую полугруппу G над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ с контролирующей функцией ϕ, определенную соотношением: слой G_m полугруппы над точкой $m \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ равен $\pi^{-1}(m) \cap \Delta_J$.*

2) *Сопоставление из* 1) *задает взаимнооднозначное соответствие между наборами конусов, согласованными с функцией ϕ и контролируемыми полугруппами над $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ с контролирующей функцией ϕ.*

9. Выпуклые функции и их непрерывные продолжения. В этом пункте определяются выпуклые функции на произвольном подмножестве X пространства $\mathbb{R}^n$. Обсуждаются вопросы о непрерывности таких функций и об их выпуклом продолжении на выпуклую оболочку множества X.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – некоторое множество и $f\colon P \to \mathbb{R}$ – вещественно-значная функция на этом множестве. *Надграфиком* $\Gamma_{\geqslant f}$ функции f назовем подмножество пространства $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n + \mathbb{R}^1$, определенное соотношением: $(x,y) \in \Gamma_{\geqslant f}$, если $x \in P$ и $y \geqslant f(x)$.

Пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ имеет естественную проекцию $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$.

Определение. Функция называется *выпуклой на множестве X*, если ее надграфик $\Gamma_{\geqslant f} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – выпуклое множество над своей проекцией X.

Пусть $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n + \mathbb{R}^1$ и $Y \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – выпуклое множество, пересечение которого с каждой прямой $\pi^{-1}(x)$ замкнуто и является прямой $\pi^{-1}(x)$ или лучом (x,u), где $u \geqslant u_0(x)$.

Пусть $X = \pi(Y)$ и X_* – множество внутренних точек множества X. Пусть для хотя бы одной точки $x \in X_*$ множество Y_x является лучом. Тогда пересечение границы множества Y с множеством $X_* + \mathbb{R}^1$ является графиком непрерывной выпуклой функции на X_*. Другими словами, справедлива следующая теорема.

Теорема 26 (о функции, связанной с выпуклым множеством). *Пусть существует хотя бы одна точка $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ такая, что $c \notin Y$ и $\pi(c) \in X_*$. Тогда для каждого $x \in X$ среди точек $(x, y) \in Y$ существует точка с минимальной координатой $y = f(x)$. Определенная этим соотношением функция f непрерывна на множестве X_*.*

Доказательство. Утверждение теоремы сводится к теореме 13 о непрерывности сечения. Прямо эта теорема неприменима, так как надграфик не ограничен. Нужны дополнительные рассуждения.

По второй теореме отделимости существует гиперплоскость, проходящая через точку c, такая, что множество Y лежит в одном из двух замкнутых полупространств, для которых гиперплоскость является границей. Эта гиперплоскость не может быть вертикальной, так как $\pi(c)$ – внутренняя точка множества X^0. Следовательно, ее можно рассматривать как график линейной функции на пространстве $\mathbb{R}^n$. Множество Y лежит над графиком этой линейной функции. Поэтому при каждом $x \in X$ на замкнутом множестве $\pi^{-1}(x) \cap Y$ координата y ограничена снизу. Следовательно, функция $y = f(x)$ определена на всем множестве X.

Так как точка $a \in X_*$, существует симплекс Γ с вершинами $a_1, \dots, a_{n+1} \in X_*$, для которого точка a внутренняя. Обозначим через C максимум из чисел $f(a_1), \dots, f(a_k)$. Из выпуклости множества Y вытекает, что функция f на симплексе Γ не превосходит C.

Определим выпуклое множество $Y_{\mathrm{com}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ формулой $Y_{\mathrm{com}} = Y \cap \pi^{-1}(\Gamma) \cap L_C$, где L_C – полупространство, состоящее из точек (x, u), $u \leqslant C$. По построению, Y_{com} – компактное выпуклое множество, $\pi(Y_{\mathrm{com}}) = \Gamma$ и для каждого $x \in \Gamma$ минимальное значение координаты y на точках $(x, y) \in \pi^{-1}(x) \cap Y_{\mathrm{com}}$ равно $f(x)$. По теореме 13 множество $\pi^{-1}(x) \cap Y_{\mathrm{com}}$ непрерывно зависит от точки $x \in \Gamma_*$. Поэтому функция f непрерывна.

Теорема 27 (о непрерывном продолжении выпуклой функции). *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – некоторое множество, $(\mathbb{L}X)_*$ – множество внутренних точек выпуклой оболочки $\mathbb{L}X$ множества X и $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция на множестве X. Тогда существует непрерывная функция $f\colon (\mathbb{L}X)_* \to \mathbb{R}^1$ на множестве $(\mathbb{L}X)_*$, ограничение которой на множество $X \cap (\mathbb{L}X)_*$ совпадает с функцией ϕ.*

Доказательство. Надграфик $\Gamma_{\geqslant\phi}$ функции ϕ с каждой точкой (x, y) содержит все точки (x, u), где $u \geqslant y$. Из теоремы Каратеодори видно, что выпуклая оболочка $\mathbb{L}\Gamma_{\geqslant\phi}$ надграфика $\Gamma_{\geqslant\phi}$ тоже обладает этим свойством. Очевидно, что тем же свойством обладает и замыкание $\overline{\mathbb{L}\Gamma}_{\geqslant\phi}$ выпуклой оболочки надграфика. Применим к множеству $\overline{\mathbb{L}\Gamma}_{\geqslant\phi}$ предыдущую теорему. Пусть $f\colon X_* \to \mathbb{R}^1$ – функция, существование и непрерывность которой гарантирует предыдущая теорема. В точках множества $X \cap X_*$ по теореме 9 о замыкании сечения выпуклого множества функция f совпадает с функцией ϕ. Теорема доказана.

В теореме 27 идет речь лишь о внутренних точках выпуклой оболочки множества X. Теорема не может быть распространена на граничные точки.

Пример 4. Любая функция, заданная на окружности $X = \partial B_2$ является выпуклой на X: симплексы с вершинами, лежащими в точках окружности X, не содержат никаких других точек из X, кроме вершин. Теорема 27 (к счастью) ничего не утверждает о *произвольных* функциях на окружности: в этом случае множество $X \cap X_*$ пусто.

Следствие 28 (о единственности продолжения). *Пусть множество* $X \subset \mathbb{R}^n$ *всюду плотно в своей выпуклой оболочке* $\mathbb{L}X$ *и* $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ *– выпуклая функция на* X. *Тогда существует единственная непрерывная функция* $f\colon (\mathbb{L}X)_* \to \mathbb{R}^1$ *на внутренности* $(\mathbb{L}X)_*$ *выпуклой оболочки, ограничение которой на множество* $X \cap (\mathbb{L}X)_*$ *совпадает с функцией* ϕ.

Теорема 29 (о поведении продолжения на гранях границы). *Пусть функция* $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ *выпукла на множестве* X, *плотном в многограннике* P, *и его гранях. Тогда на каждой грани* Γ *многогранника* P *(включая грань* $\Gamma = P$*) существует такая непрерывная функция* f_Γ, *что*

1) *если* $x \in X$ *– внутренняя точка грани* Γ, *то* $f_\Gamma(x) = \phi(x)$;
2) *если грань* Γ_1 *содержится в грани* Γ_2, *то* $f_{\Gamma_1} \geqslant f_{\Gamma_2}$.

Теорема выводится из теоремы 19 также, как теорема 26 выводится из теоремы 13.

Для функций на множестве $\Delta_\mathbb{F}$ всех $\mathbb{F}$-точек выпуклого множества $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ определение выпуклости можно упростить.

Определение. Функция $\phi\colon \Delta_\mathbb{F} \to \mathbb{R}^1$ обладает *свойством* $\mathbb{F}$-*выпуклости*, если для любых двух точек $a, b \in \Delta_\mathbb{F}$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{F}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, выполняется неравенство

$$\phi(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda\phi(a) + (1-\lambda)\phi(b).$$

Утверждение 30 (об $\mathbb{F}$-выпуклости функций). *Функция* ϕ *выпукла на множестве* $\Delta_\mathbb{F}$; *если и только если она обладает свойством* $\mathbb{F}$-*выпуклости.*

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 6.

Для поля $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ рациональных чисел определение $\mathbb{F}$-выпуклости можно еще немного упростить.

Определение. Функция $\phi\colon \Delta_\mathbb{Q} \to \mathbb{R}^1$ обладает *свойством* $\mathbb{Q}$-*выпуклости*, если для любых двух точек $a, b \in X_\Delta$ и любого натурального числа k выполняется неравенство

$$\phi\left(\frac{a}{k} + \frac{(k-1)b}{k}\right) \leqslant \frac{\phi(a)}{k} + \frac{(k-1)\phi(b)}{k}.$$

Утверждение 31 (об $\mathbb{Q}$-выпуклости функций). *Функция* ϕ *выпукла на множестве* $\Delta_\mathbb{Q}$, *если и только если она обладает свойством* $\mathbb{Q}$-*выпуклости.*

Доказательство. Утверждение вытекает из утверждения 8.

Пример 5. Пусть $c > 0$ и c^r – функция, определенная на рациональных числах формулой $c^r = \sqrt[q]{c^p}$, где $r = p/q$. Для $a, b \in \mathbb{Q}$ и целого $k > 1$ выполняется неравенство

$$c^{a/k+(k-1)b/k} \leqslant \frac{c^a}{k} + \frac{(k-1)c^b}{k}\,.$$

Действительно, деля на c^b, приведем неравенство к виду

$$c^{(a-b)/k} \leqslant \frac{c^{a-b}-1}{k} + 1.$$

Положим $u = (c^{a-b} - 1)/k$. Видно, что $u > -1$. Неравенство сводится к утверждению: $(1+u)^k \geqslant 1 + ku$, которое автоматически проверяется индукцией по k.

Итак, функция c^r обладает свойством $\mathbb{Q}$-выпуклости. Поэтому она продолжается по непрерывности на всю вещественную прямую.

Замечание. Общеизвестно, что функция c^x не только непрерывна, но и дифференцируема. Этот факт тоже объясняется выпуклой геометрией. *Непрерывная выпуклая функция одной переменной в каждой точке имеет левую и правую производную и во всех точках, кроме счетного числа, имеет производную.* Это вытекает из следующего геометрического факта: *выпуклая фугура на плоскости в каждой точке границы имеет касательный конус, который во всех точках, кроме счетного числа, является полуплоскостью.* Функция c^x во всех точках “устроена одинаково”, так как $c^{a+x} = c^a c^x$. Поэтому функция c^x дифференцируема в каждой точке.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] K. Kaveh, A. G. Khovanskii, *Newton convex bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory*, 2009, arXiv: math.AG/0904.3350.

[2] В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, *Геометрия*, МЦНМО, М., 2007.

А. Г. Хованский
Институт системного анализа РАН, г. Москва
E-mail: askold@math.toronto.edu

Поступило
10.06.2009
Исправленный вариант
13.07.2011