СЕМЕЙСТВА СЕЧЕНИЙ КВАДРИК И КЛАССИЧЕСКИЕ ГЕОМЕТРИИ*

А. Г. Хованский

Памяти моего отца Георгия Сергеевича Хованского

В заметке описываются все римановы метрики на невырожденных квадриках, геодезические относительно которых являются плоскими кривыми. Показывается, что все такие метрики имеют постоянную кривизну, следовательно, локально задают на квадрике одну из классических геометий. Настоящая заметка является непосредственным продолжением статьи [5], в которой решалась возникшая из практики задача о спрямлении окружностей. Эта практическая задача была поставлена Г.С. Хованским в связи с его работами о преобразовании номограмм из выравненных точек в циркульные номограммы ([1–4]).

1. Квадрические точки проективной поверхности. Скажем, что точка A является *квадрической* точкой на ростке вещественной регулярной поверхности в вещественном проективном пространстве, если существует невырожденная квадрика, которая аномально близко приближает поверхность в этой точке, именно, если расстояние от точки B на поверхности до квадрики является величиной четвертого порядка малости относительно расстояния от A до B.

Аффинную систему координат x, y, z в аффинной окрестности проективного пространства назовем *приспособленной* к поверхности в точке A, если начало координат совпадает с этой точкой, а плоскость $z = 0$ касается поверхности в точке A. Пусть локальное уравнение поверхности в окрестности точки A в некоторой приспособленной системе координат имеет вид $z = f(x, y) = B_2(x, y) + K_3(x, y) + \dots$, где B_2 и K_3 — соответственно, квадраичный и кубический члены ряда Тейлора функции f в начале координат.

Лемма 1. *1. Точка A является квадрической точкой поверхности, если и только если кубический полином K_3 делится на квадратный полином B_2. 2. Условие делимости полинома K_3 на полином B_2 является проективно инвариантным, т.е. не зависит от выбора приспособленной системы координат. 3. Точка A является квадрической точкой поверхности, если и только если существует приспособленная система координат, для которой полином K_3 тождественно равен нулю.*

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта 99–01–00245 Российского Фонда Фундаментальных исследований и Канадского Гранта 156833–98.

Доказательство. 1. Пусть $K_3 = L_1B_2$, где L_1 — однородный линейный полином от x, y. Тогда поверхность анамально близко приближается квадрикой $z = B_2 + L_1z$. Обратно, всякая квадрика, касающаяся в нуле плоскости $z = 0$, задается уравнением вида $z = B_2 + L_1z + cz^2$, где B_2 и L_1 — однородные полиномы от x, y второй и первой степени, а c — константа. Решая это уравнение с точностью до кубических членов, получаем $z = B_2 + L_1B_2 + \dots$. Пункт 2 немедленно вытекает из пункта 1. Пункт 3 в одну сторону тоже сразу вытекает из пункта 1. Для доказательства пункта 3 в другую достаточно выбрать приспособленную систему координат, удовлетворяющую следующим дополнительным условиям: бесконечноудаленная плоскость совпадает с касательной плоскостью приближающей квадрики в некоторой точке квадрики, отличной от точки A, а ось z проходит через эту бесконечноудаленную точку. В таких координатах приближающая квадрика задается уравнением $z = B_2(x, y)$, а полином K_3 обращается в нуль.

Невырожденная квадрика пересекается со своей касательной плоскотью по паре прямых, вещественных или комплексных. Не сложно проверяется следующая

Лемма 2. *Точка A является квадрической на ростке строго гиперболической поверхности, если и только если каждая из двух веток пересечения поверхности с касательной плоскостью в точке A имеет перегиб в этой точке. Точка A является квадрической на ростке строго эллиптической поверхности, если и только если каждая из двух комплексных веток пересечения комплексификации 3-струи поверхности с комплексной касательной плоскостью в точке A имеет перегиб в этой точке.*

Замечание. Определение квадрической точки автоматически переносится на комплексные поверхности в комплексном проективном пространстве. Мне представляется интересной следующая задача. Сколько квадрических точек имеет общая поверхность степени n в комплексном проективном пространстве?

2. Спрямляемые семейства плоских сечений. Рассмотрим в окрестности точки нуль на плоскости росток гладкой функции F, разложение которой в ряд Тейлора с точностью до третьего порядка имеет вид $F(x, y) = \mu x - y + P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots$, где μ — число, а P_2 и P_3 — однородные полиномы, соответственно, степени 2 и 3. Следующая лемма 3 проверяется прямым вычислением.

Лемма 3. *Решенеие $y(x)$ уравнения $F(x, y(x)) = 0$ с точностью до третьего порядка малости задается формулой*

$$y(x) = \mu x + P_2(1, \mu)x^2 + \left[\frac{\partial P_2}{\partial y}(1, \mu)P_2(1, \mu) + P_3(1, \mu)\right]x^3 + \dots.$$

Следствие 1. *Пересечение поверхности $z = f(x, y) = B_2(x, y) + K_3(x, y) + \dots$ с плоскостью $y = \mu x + az$ в локальных координатах x, y на поверхности с точностью до третьего порядка малости задается формулой*

$$y(x) = \mu x + aB_2(1, \mu)x^2 + \left[a^2\frac{\partial B_2}{\partial y}(1, \mu)B_2(1, \mu) + aK_3(1, \mu)\right]x^3 + \dots.$$

Следствие получается применением леммы 3 к уравнению $y = \mu x + af(x, y)$.

Множество кривых на поверхности называется (локально) *спрямляемым*, если существует (локальный) диффеоморфизм поверхности на плоскую область, переводящий каждую кривую из множества в интервал прямой линии. Пучком кривых с центром в точке A назовем любое множество кривых на поверхности, проходящих через точку A. Если пучок кривых локально спрямляется около своего центра, то различные кривые из пучка имеют в центре пучка различные касательные. Рассмотрим пучок кривых на плоскости с центром в начале координат и обозначим через γ_μ кривую из пучка, которая в начале координат касается прямой $y = \mu x$. В окрестности начала координат кривая γ_μ является графиком некоторой функции $y_\mu(x)$.

Лемма 4. *Если пучок кривых $\{y = y_\mu(x)\}$ локально спрямляется около точки нуль, то существуют некоторые полиномы T_3 и T_5 от параметра μ степени не выше 3 и 5, соответственно, такие, что разложение функции $y_\mu(x)$ в ряд Тейлора с точностью до третьего порядка малости задается формулой*

$$y_\mu(x) = \mu x + T_3(\mu)x^2 + T_5(\mu)x^3 + \dots .$$

При этом коэффициент b_5 при μ^5 в полиноме T_5 связан с коэффициентом a_3 при μ^3 в полиноме T_3 соотношением $b_5 = 2a_3^2$.

Доказательство. Сделав аффинное преобразование образа, можно добиться того, чтобы спрямляющий диффеоморфизм переводил начало координат в себя и имел в этой точке тождественный дифференциал, т.е. чтобы он задавался парой функций $G_1(x, y) = x + \dots$, $G_2(x, y) = y + \dots$, где точками обозначены члены второго порядка малости. Кривая γ_μ при таком диффеоморфизме переходит в прямую $y = \mu x$, т.е. на кривой γ_μ функция $G_2(x, y) - \mu G_1(x, y)$ обращается в нуль. Лемма 4 получается применением леммы 3 к этой функции.

Теорема о семи сечениях. *Пусть вторая квадратичная форма ростка поверхности в квадрической точке невырождена. Рассмотрим некоторый пучок сечений поверхности плоскостями, проходящими через квадрическую точку и трансверсальными к поверхности в этой точке. Допустим, что пучок содержит не менее семи сечений. Тогда пучок локально спрямляется в окрестности квадрической точки, если и только если все секущие плоскости проходят через общую прямую, трансверсальную поверхности в квадрической точке.*

Доказательство. Если пучок сечений локально спрямляем, то все секущие плоскости $y = \mu x + az$ пересекают касательную плоскость $z = 0$ к поверхности по различным прямым. Поэтому коэффициент a в уравнении сечения является некоторой функцией g от коэффициента μ, $a = g(\mu)$. Функция g определена для значений параметра μ, соответствующих сечениям из пучка. Если пучок сечений локально спрямляем, то для всех этих значений параметра μ согласно следствию 1 и лемме 4 должны выполняться следующие соотношения:

1) $g(\mu)B(1, \mu) = T(\mu)$;

2) $g^2(\mu)\dfrac{\partial B_2}{\partial y}(1,\mu)B_2(1,\mu)+g(\mu)K_3(1,\mu)=T_5(\mu)$.

Умножив соотношение 2) на B_2 и воспользовавшись соотношением 1), получим

$$(*)\qquad T_3^2(1,\mu)\frac{\partial B_2}{\partial y}(1,\mu)+T_3(\mu)K_3(1,\mu)=T_5(\mu)B_2(1,\mu).$$

Если сечений не менее семи, то полиномы, стоящие в левой и правой части соотношения $(*)$, должны быть тождественно равны: полиномы степени ≤ 7, имеющие одинаковые старшие коэффициенты, тождественно совпадают, если они совпадают в семи точках. Так как центр пучка является квадрической точкой, то полином $K_3(1,\mu)$ делится на полином $B_2(1,\mu)$. Так как вторая квадратичная форма в центре пучка невырождена, то корни полинома B_2 простые и, следовательно, полином $\dfrac{\partial B_2}{\partial y}(1,\mu)$ не имеет общих корней с полиномом $B_2(1,\mu)$. Поэтому из тождества $(*)$ вытекает, что полином T_3^2 делится на полином B_2. Так как корни полинома B_2 простые, полином T_3 должен делиться на полином B_2. В силу соотношения 1) получаем, что $g(\mu)$ — линейный полином относительно μ. Поэтому все кривые из пучка высекаются на поверхности плоскостями вида $y=\mu x+(p\mu+q)z$, где p и q — некоторые константы. Все эти секущие плоскости проходят через общую прямую, трансверсальную поверхности в квадрической точке.

Обратно, пусть все сечения проходят через общую прямую, трансверсальную к поверхности. Тогда параллельное проектирование поверхности вдоль этой прямой спрямляет множество сечений.

Теорема. *Пусть на ростке невырожденной квадрики в вещественном проективном пространстве задана некоторая риманова метрика, все геодезические относительно которой являются плоскими кривыми. Тогда все плоскости, содержащие геодезические, проходят через одну общую точку, а все семейство геодезических локально спрямляемо.*

Доказательство. Пучок геодезических, выходящих из одной точки риманова многообразия, локально спрямляем: его спрямляет экспоненциальное отображение. Согласно теореме о семи сечениях, плоскости, содержащие геодезические, проходящие через одну точку квадрики, проходят через общую прямую. (Эта теорема применима для геодезических, не касающихся асимптотических направлений, ибо такая кривая не может быть высечена касательной плоскостью. Для геодезических, касательных к асимптотическим направлениям, надо еще воспользоваться непрерывной зависимостью геодезической от направления.) Такие прямые для достаточно близких точек квадрики пересекаются, т.к. достаточно близкие точки соединяются геодезической. Фиксируем три точки на квадрике, не лежащие на одной геодезической. Соответствующие им три прямые попарно пересекаются и, следовательно, проходят через общую точку, т.к. прямые по условию не лежат в одной плоскости. Прямая, соответствующая любой достаточно близкой точке A на квадрике, тоже проходит через эту общую точку, т.к. из трех фиксированных точек можно выбрать две, не лежащие с точкой A на одной геодезической. На гладкой поверхности, лежащей в трехмерном пространстве, плоскости, проходящие через фиксированную точку O пространства, высекают двухпараметрическое семейство кривых. Это семейство локально спрямляемо около любой точки A, отличной от точки O, для которой прямая, соединяющая A и O, трансверсальна поверхности. Действительно, это семейство спрямляется проектированием из точки O.

Итак, для фиксированного ростка квадрики семейство плоских геодезических задается точкой O и зависит, следовательно, от трех параметров. С точностью до проективного преобразования трехмерного пространства таких семейств всего пять: три для эллиптической квадрики (точка O может находиться либо внутри выпуклого тела, ограниченного квадрикой, либо на его границе, либо вне этого тела) и два для гиперболической квадрики (точка O может находиться либо на квадрике либо вне ее).

3. Метрики. Согласно классической теореме Бельтрами (см. [6], стр. 296), если геодезические на плоской области относительно римановой метрики являются прямыми, то метрика имеет постоянную кривизну. Такая метрика индуцируется при некотором проективном преобразовании либо из метрики модели Клейна геометрии Лобачевского, либо из евклидовой метрики плоскости, либо из метрики Римана на проективной плоскости (здесь имеются в виду классические метрики, определенные с точностью до положительного коэффициента пропортдиональности, гауссова кривизна для которых может принимать любое вещественное значение). Тем самым мы получаем полное описание римановых метрик на ростке невырожденной квадрики, для которых все геодезические являются плоскими кривыми. *Для фиксированного спрямляемого семейства сечений риманова метрика, относительно которой сечения являются геодезическими, зависит от шести параметров: гауссовой кривизны, которая может принимать любые вещественные значения, и элемента восьмимерной группы проективных преобразований плоскости, определенного с точностью до правого класса смежности относительно трехмерной подгруппы изометрий, соответственно, плоскости Лобачевского, плоскости Евклида или плоскости Римана.*

Следствие 2. *1. Пучок, содержащий не менее семи окружностей или прямых на плоскости, локально спрямляем, если и только если все кривые из пучка проходят через общую точку, отличную от центра пучка (см. [5]). 2. Двухпараметрическое семейство прямых и окружностей на плоской области является семейством геодезических относительно некоторой римановой метрики, если и только если семейство индуцируется при некотором конформном преобразовании плоскости (пополненной бесконечноудаленной точкой) либо из семейства геодезических модели Пуанкаре плоскости Лобачевского, либо из семейства геодезических плоскости Евклида, либо из семейства геодезических плоскости Римана. При этом риманова метрика на плоской области индуцируется из соответствующей классической метрики, определенной с точностью до проективного преобразования.*

Доказательство. При помоще стереографической проекции отобразим плосперейдут в окружности на сфере, которые являются плоскими сечениями сферы. Следствие теперь вытекает из доказанных выше фактов.

Литература

1. Хованский Г. С., *Основы номографии*, М., “Наука”, 1976.
2. Хованский А. Г., Хованский Г. С., *Преобразование номограмм из выравненных точек и с параллельным индексом в номограммы из равноудаленных точек*, ДАН СССР, Т. 248, (1979), N 3, С. 535–538.
3. Хованский А. Г., Хованский Г. С., *Преобразование номограммы из выравненных точек и с параллельным индексом в номограммы из равноудаленных точек и исследование их приспособляемости*, Номографический сборник (Хованский Г. С., ред.), N 14, ВЦ АН СССР, Москва, 1982, С. 56–77.
4. Хованский А. Г., Хованский Г. С., *Методы номогфафирования некоторых зависимостей, основанные на использовании двухпараметрических семейств прямых, окружностей и эллипсов*, Номографический сборник (Хованский Г. С., ред.), N 13, ВЦ АН СССР, Москва, 1979, С. 70–105.
5. Хованский А. Г., *О спрямлении окружностей*, Сибирск. математ. журнал, Т. 21, (1980), N 4, С. 221–226.
6. Manfredo P. do Carmo, *Differentsial Geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.