М.Н.Гусаров.

Вариации заузленных графов.

Геометрическая техника n-эквивалентности.

Теория вариаций заузленных графов представляет собой геометрическое исчисление, предназначенное для изучения трехмерных многообразий и вложенных в них одномерных объектов в контексте инвариантов конечного типа и связанных с ними теорий. Статья содержит замкнутое в себе изложение этой теории с полными доказательствами.

Эта статья является систематическим изложением теории, развитой мною в серии докладов на топологическом семинаре Уппсальского университета в 1995 году. Тогда же был написан этот текст. Однако, за время работы над ним открылись обстоятельства, которые заставили меня задержать публикацию. В частности оказалось, что понятие вариации заузленных графов можно немного обобщить, после чего его можно описать внешними свойствами, без конструкции, которая в представленном здесь изложении кажется выбранной вполне произвольно.

Естественно, я предпринял попытку модифицировать изложение с учетом нового подхода. В результате оказалось, что все внешние результаты можно изложить даже проще, если не привлекать конкретных конструкций этой статьи (см. [Г2]). Таким образом, вся развитая здесь мощная техника оказалась без достойных приложений.

Два обстоятельства заставили меня вернуться к старому тексту. Во-первых, изучение классов n-эквивалентности зацеплений и трехмерных многообразий (для них та же техника отлично работает) дошло до стадии конкретных вычислений. Тут уже не обойтись без конструктивных описаний и предлагаемая техника оказывается работоспособной.

Во-вторых, неожиданное обстоятельство заставляет предположить, что основная конструкция далеко не так случайна, как это кажется с первого взгляда. Еще одному исследователю удалось почти в точности, хотя и совершенно независимо, повторить тот же путь ([H]). Созданная им теория класперов эквивалентна теории n-вариаций. Впрочем, способ описания и, что еще важнее, конкретный способ рисования картинок несколько другой. Таким образом есть два языка описания, которые (пока!) допускают точный и легкий перевод, но могут оказаться далеко не одинаково удобны.

Дальнейшее изложение — текст 1995 года. Мне показалось невозможным модифицировать его после значительного изменения точки зрения, не разрушив живую ткань статьи. Его замкнутость в себе позволила ему не устареть, хотя, конечно, сейчас он вызывает много новых ассоциаций. Единственно, я снял один не подтвердившийся анонс в Замечании 10.7. Вообще, мой энтузиазм по отношению к частично определенным инвариантам (§10) значительно уменьшился за прошедшее время.

Введение.

Под заузленным графом в этой статье понимается гладкое вложение графа в трехмерное многообразие, рассматриваемое с точностью до гладкой изотопии, продолжимой на окрестность образа. При этом можно потребовать, чтобы в окрестности некоторого компактного подмножества многообразия образ не менялся при изотопии.

Первый параграф посвящен Y-переклейкам. Эта трехмерная конструкция является технической базой всей дальнейшей работы. Может показаться, что все остальное является надстройкой над этой операцией. Это не совсем так. На самом деле, Y-переклейки появились, когда почти все остальное уже существовало. Однако, они очень удачно легли в основание конструкции, многократно упростив и определения, и обоснования. Многообещающе то, что Y-переклейки пришли из другого мира — мира преобразований трехмерных многообразий. Но даже используемые здесь, с точки зрения трехмерной — тривиальные, они оказались весьма мощным средством.

Второй параграф описывает n-вариации заузленных графов. Это основной объект исследования в предлагаемой работе. Они исследуются как достаточно тонкие операции, не изменяющие грубых свойств вложения, в частности, гомотопического типа, и инвариантов малых степеней. Однако, теорема 5.1 показывает, что на самом деле они тоже могут рассматриваться как переклейки. Впрочем, работа не развивает далее трехмерное направление.

Третий параграф распространяет определения в сторону более грубых операций. Построенные здесь I-переклейки и 1-вариации может быть и не слишком интересны сами по себе, но позволяют органически включить в рассмотрение все, что находится в пределах данного гомотопического типа. Кроме того, они являются мостиком к более привычным способам описания операций.

Четвертый параграф посвящен операциям с переклейками. Хотя формулировки, в принципе, годятся и для исследования многообразий, техника развивается в направлении, необходимом для исследования вложений графов. Она доведена до уровня формального исчисления картинок.

Пятый параграф затрагивает вопросы тонкие и, пока еще, во многом темные. Он практически не нужен, если работать в евклидовом пространстве или сфере. Более того, поскольку n-вариации локальны, в том смысле, что происходят внутри шара, он не очень полезен и для исследования отдельных операций. Действительно использоваться он должен, когда операции взаимодействуют в многообразии глобально. Фактически, он служит для придания дальнейшим формулировкам точного смысла, пригодного для использования в таких ситуациях. Читатель, который не собирается использовать эту технику в подобных ситуациях и не заботится о проверке точности обоснований, сэкономит много сил, если ограничится первым впечатлением о том, что такое подобные оси, и не будет вдумываться в тонкости, связанные с фиксированием дисков, при определенных с точностью до изотопии операциях.

Шестой параграф служит логическим продолжением четвертого, поднимая операции на уровень n-вариаций. Текст в нем следует воспринимать скорее как пояснение к картинкам, чем как самостоятельное изложение, которое эти картинки иллюстрируют. Однако, степень формализации уступает достигнутой в §4, о чем свидетельствуют пунктирные рамки на картинках. За ними спрятаны отголоски тех проблем, которым посвящен предыдущий параграф. При первом знакомстве на них можно не обращать внимания, но при использовании техники забывать о них нельзя. Они исчезают, только если действовать на уровне первого приближения. Тогда n-вариации превращаются, практически, в "диаграммы китайских иероглифов", трехмерным аналогом которых они и являются. Девять теорем этого параграфа демонстрируют высокую пластичность новой техники, а картинки вызовут, вероятно, у многих читателей ассоциации из смежных областей. Конечно, неполнота формализации затрудняет использование техники, но и в таком виде она достаточно работоспособна.

Понятие n-эквивалентности, которому посвящен седьмой параграф, с точки зрения идейной, является главным. Все предыдущее дает ему мощную техническую базу. С наглядной стороны, более удобно воспринимать его через очень простую операцию — накидывание петли порядка n (определение 7.4 и теорема 7.5).

В §8 речь идет о вариативных схемах. Это некоторое развитие прежде данного (см. [Г1]) и вполне работоспособного понятия. Вариативные схемы позволяют, в некоторой степени, алгебраизировать развитую технику. Они служат мостиком и к собственно алгебраической технике n-эквивалентности, что, впрочем, уже выходит за рамки этой работы.

В девятом параграфе развитая техника применяется к струнным зацеплениям. Доказано, в частности, что классы n-эквивалентности струнных зацеплений образуют разрешимую группу. Эта теорема была, в принципе, доказана и с помощью прежнего определения вариативных схем, но доказательство было значительно сложней и опубликовано только для узлов (в [Г1]). Теорема 9.3, важная и сама по себе, показывает, для узлов, что новый вариант определения n-эквивалентности равносилен прежнему.

Десятый параграф связывает n-эквивалентность с наиболее популярным понятием в этой области — инвариантами конечной степени. С этой точки зрения, вложения n-эквивалентны тогда и только тогда, когда их нельзя различить инвариантами степени n. Параграф посвящен уточнению этого утверждения. В частности, приходится несколько расширить класс рассматриваемых инвариантов: разрешить им быть частично определенными.

§1. Об Y-переклейках.

Определение 1.1. Пусть имеется трехмерное многообразие M, и пусть в него гладко вложен граф Γ, который изображен на рисунке 1a (Y-граф). Ребра в центральной вершине должны образовывать углы по одной трети полного. Концы замкнутых ребер должны сливаться в вершинах в гладкие линии, перпендикулярные незамкнутому ребру. Каждое замкнутое ребро должно быть оснащено нормальным векторным полем, касающимся в вершине незамкнутого ребра. Незамкнутые ребра оснащаются нормальными прямыми, которые в вершинах должны находиться в одной плоскости с касательными к ребрам. Многообразие должно быть ориентировано в окрестности графа.

Продолжим вложение до диффеоморфизма окрестности Y-графа, изображенной на рисунке 1b, на регулярную окрестность образа, который согласуется с ориентацией и оснащениями. Такой диффеоморфизм определен с точностью до изотопии, связанной на графе. Перенесем, с помощью этого диффеоморфизма, в многообразие M три изображенных на границе окрестности кривых. (Эти кривые получаются друг из

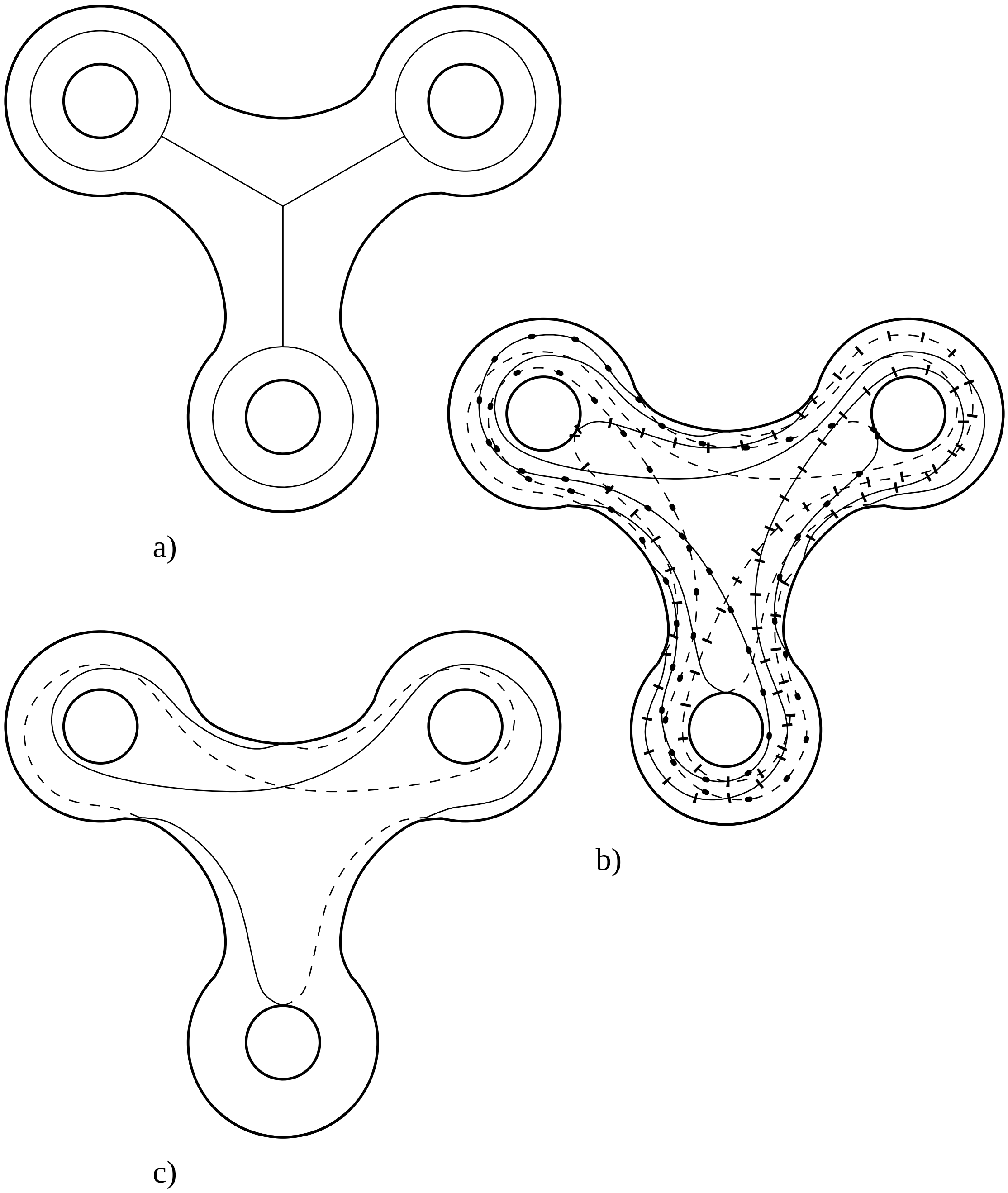


Рис. 1.

друга поворотами. Одна из них изображена отдельно на рисунке 1c). Вырежем из M окрестность графа, приклеим вдоль указанных кривых ручки индекса 2, затем ручку индекса 3. Получится новое многообразие. Описанный процесс будет называться Y-*переклейкой.*

Теорема 1.2. *Если хотя бы одна из петель Y-графа* Γ *может быть затянута гладким вложенным диском* D, *касающимся оснащения и не задевающим внутренними точками графа, то Y-переклейка в окрестности графа* Γ *порождает мно-*

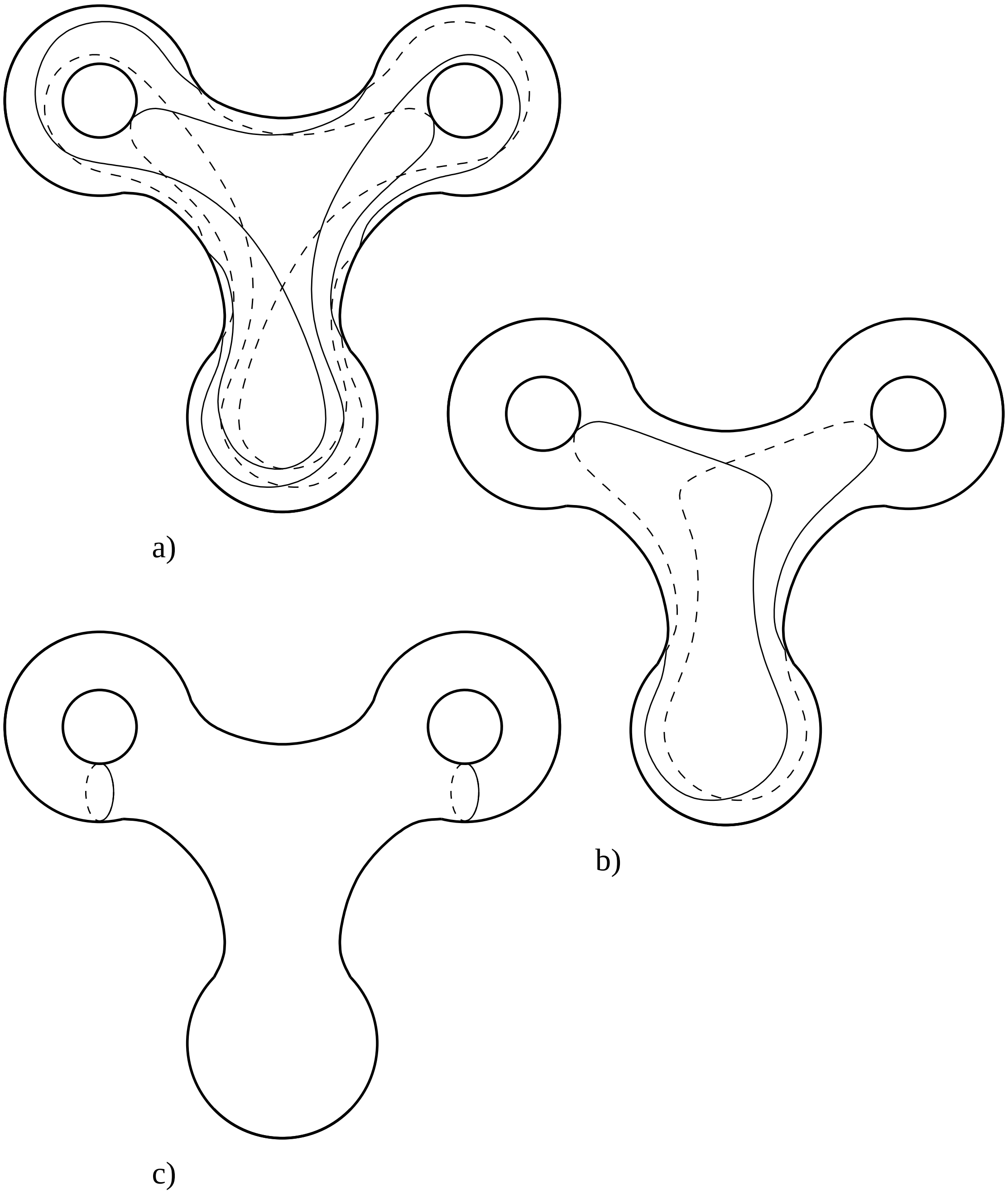


Рис. 2.

гообразие диффеоморфное исходному, причем существует единственный, с точностью до связанной изотопии, диффеоморфизм, тождественный вне регулярной окрестности V множества $\Gamma \cup D$.

Доказательство. Пусть на рис. 1.b диск D затягивает нижнюю петлю. Тогда дополнение регулярной окрестности графа Γ можно получить из $M \setminus V$ добавлением ручки индекса 1. Очевидно, что эта ручка взаимно уничтожается с ручкой индекса 2, приклеенной вдоль линии, изображенной на рис. 1c. Оставшиеся две ручки индекса

2 нужно приклеивать вдоль линий изображенных на рис. $2a$, которые теперь, после заклеивания нижней дырки, изотопны меридианам (рис. $2b-c$). Очевидно теперь, что ручки можно выбрать в многообразии M и единственным, с точностью до изотопии, образом.

Замечание 1.3. Пусть все три петли графа Γ—маленькие, незаузленные и с нулевым оснащением. Пусть имеются три дуги, зацепленных с этими петлями (рис. $3a$). Если произвести Y-переклейку в окрестности Γ , а результат отождествить с M, то дуги окажутся сцеплены между собой (рис. $3b$). Все три дуги, конечно равноправны, а получившееся зацепление — это зацепление Боромео (рис. $3c$).

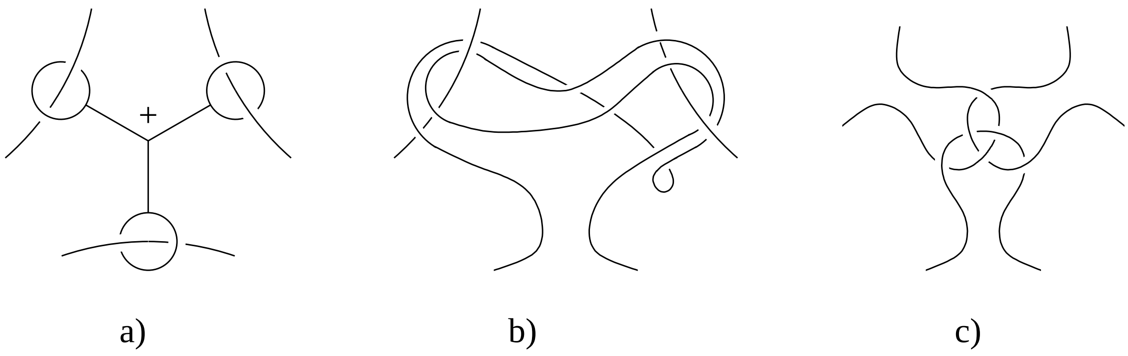


Рис. 3.

§2.Об n-вариациях.

Определение 2.1. Осью n-вариации ($n > 1$) называется граф специального вида T, гладко вложенный в трехмерное многообразие и специальным образом оснащенный. А именно, для оси n-вариации должны выполняться следующие условия.

(1) Граф T должен иметь $2n$ вершин; каждая из них трехвалентна.

(2) Если выкинуть из T все петли, то есть ребра у которых начало и конец совпадают, должно остаться дерево. Вершины, к которым примыкают петли, будут далее называться концевыми, а остальные — внутренними.

(3) Все петли должны быть затянуты гладкими вложенными дисками, не пересекающимися и не задевающими внутренними точками граф T. Диски должны быть заданы с точностью до изотопии, и их не нужно фиксировать, если, например, многообразие — сфера.

(4) Касательные к ребрам во внутренней вершине должны образовывать углы по одной трети полного. В концевой вершине незамкнутое ребро перпендикулярно концам замкнутого, которые соединяются в гладкую линию.

(5) Каждое незамкнутое ребро должно быть оснащено парами нормальных, взаимно перпендикулярных прямых (“крестами”).

(6) В вершинах, одна из прямых оснащения должна быть перпендикулярна и другим ребрам.

(7) Если ребро соединяет две внутренние вершины, то указанные в пункте (6) прямые для разных его концов принадлежат в оснащении к разным семействам. Для ребер, содержащих концевую вершину, такие прямые принадлежат одному семейству.

(8) В каждой внутренней вершине должна быть задана (локально) ориентация многообразия. Если оно ориентировано, то достаточно просто поставить знак $+$ или $-$.

На рисунках будет предполагаться, что одна из прямых оснащения почти все время остается в плоскости рисунка и только около косых штрихов происходит подкрутка на четверть оборота (рис. $4a$). На рис. $4b$ изображен пример оси 5-вариации.

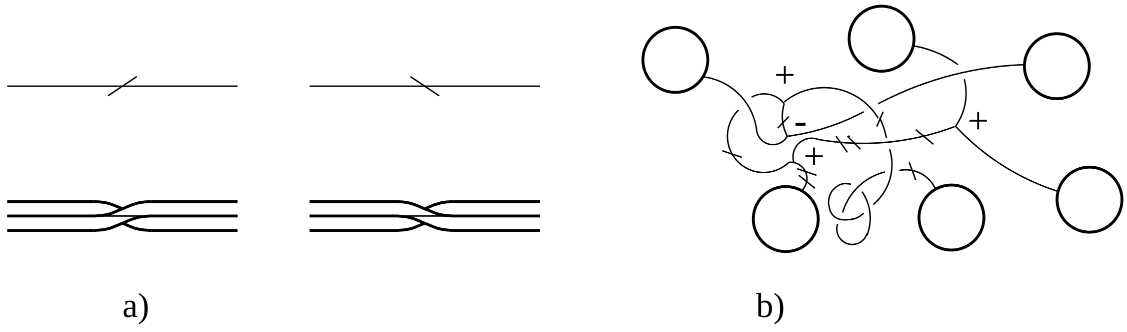


Рис. 4.

Определение 2.2. Пусть в трехмерное многообразие M вложен заузленный граф K и не пересекающая его ось n-вариации T. Тогда n-вариация графа K вдоль T выполняется следующим образом.

(1) Фиксируем диски, стягивающие петли оси, и рассмотрим регулярную окрестность оси, объединенной с дисками. Очевидно, что получится шар, внутри которого будет происходить дальнейшее.

(2) Разрежем все ребра, соединяющие внутренние вершины оси. Она разобьется на четырехвершинные графы. К вновь образованным вершинам добавим маленькие петли, чтобы получились Y-графы. Петли вблизи точек разрезания сцепим между собой (рис. 5).

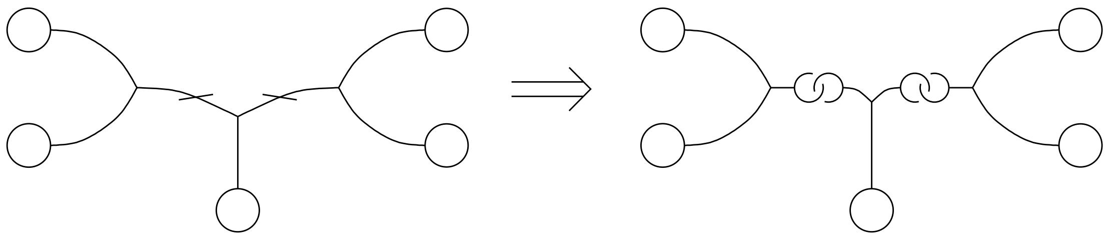


Рис. 5.

(3) Ребра Y-графов получают в качестве оснащения соответствующие прямые из оснащения оси. Выбор делается путем распространения с центральной вершины. При правильном выборе плоскостей, в которых добавляются петли, пункт (7) определения 2.1 гарантирует возможность такого оснащения. Все замкнутые ребра должны получить тривиальное (относительно имеющегося шара) оснащение.

(4) Произведем Y-переклейки в окрестности каждого из получившихся $n+1$ Y-графов. Необходимые ориентации отмечены в соответствующих вершинах оси. Переклеиваемые окрестности не должны задевать граф K.

(5) Выбранный на первом этапе шар останется шаром. Поэтому многообразие M можно отождествить с результатом переклейки так, чтобы вне этого шара соответствие было тождественным.

Произведя такое отождествление, мы получим преобразованное вложение графа K.

Доказательство корректности. Очевидно, что имеющаяся во всех пунктах свобода, ничего, с точностью до изотопии, не меняет. Значит, достаточно доказать, что, в результате всех переклеек, шар останется шаром (5). Доказательство будем проводить по индукции по числу внутренних вершин оси. Выберем какой-нибудь из Y-графов, содержащий концевую вершину оси. В соответствии с теоремой 1.2, можно считать, что переклейка в окрестности этого Y-графа не изменит ни шара, ни остальных Y-графов. Поэтому остальные переклейки можно собрать в одну или две вариации, в зависимости от того, две или одну концевую вершину содержит выбранный Y-граф. По индуктивному предположению, эти вариации сохранят шары вокруг своих осей. Шары можно выбрать принадлежащими исходно выбранному шару и не пересекающимися. Последнее нужно, чтобы первая сделанная вариация не могла помешать работе второй.

Замечание 2.3. Требования пунктов (2,3) определения 2.1 избыточны для определения 2.2. Для его корректности было бы достаточно, чтобы в каждой компоненте связности графа T была хотя бы одна затягиваемая диском петля (ср. 2.5). Получились бы операции, во многом подобные n-вариациям. Однако, действия с ними описывались бы значительно сложней.

Замечание 2.4. Если вовсе отказаться от пункта (3) определения 2.1, то получатся операции, изменяющие многообразие M, но очень похожие на n-вариации. Этот подход приводит к определению n-эквивалентности трехмерных многообразий, свойства которой очень похожи на свойства n-эквивалентности заузленных графов. При этом n-вариацией следует считать $(n+1)$-вариацию.

Теорема 2.5. *Пусть D — один из дисков, затягивающих петли оси n-вариации T. Тогда можно считать, что при вариации с этой осью граф K изменится только вблизи $T \cup D$.*

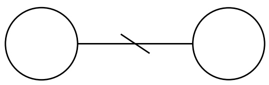
Доказательство. Упорядочим внутренние вершины оси так, чтобы кратчайший путь (вдоль оси) от любой вершины до диска D проходил только через вершины с меньшими номерами. Будем делать переклейки в порядке номеров центральных вершин. Применяя каждый раз теорему 1.2, получим требуемый результат.

Следствие 2.6. *Если одна из петель оси n-вариации не зацеплена с преобразуемым графом (то есть затягивающий ее диск не пересекает граф), то можно считать, что граф остается неподвижным при вариации.*

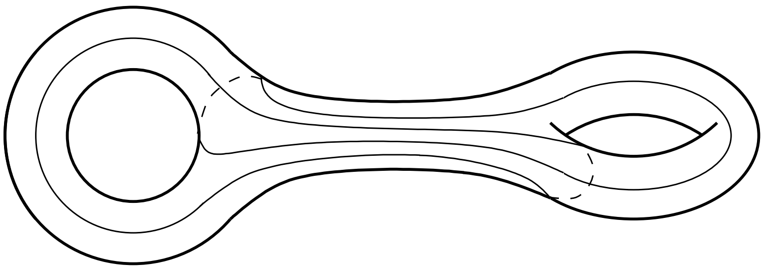
§3. Об 1-вариациях.

В предыдущем параграфе определены только вариации порядка большего, чем 1. Легко убедиться, что данные там определения не пригодны для вариаций первого порядка. Действительно, пришлось бы делать нуль переклеек, что дает, в лучшем случае, тривиальное преобразование. Между тем, 1-вариации должны, как раз, позволять изменить вложение почти как угодно. Во всяком случае, связанная в окрестности вершин регулярная гомотопия должна, с помощью последовательности таких операций, превращаться в такую же изотопию. Выбор конкретного вида таких операций должен определяться удобством распространения на вариации старших порядков. Именно этим определяется выбранный порядок изложения.

Определение 3.1. Пусть имеется трехмерное многообразие M, и пусть в него гладко вложен граф Γ , который изображен на рис. 6*a* (I-граф). Концы замкнутых ребер этого графа должны сливаться в вершинах в гладкие линии, перпендикулярные незамкнутому ребру. Каждое замкнутое ребро должно быть оснащено нормальным векторным полем, касающимся в вершине незамкнутого ребра. Незамкнутое ребро оснащается парами нормальных, взаимно перпендикулярных прямых; в вершинах одна из прямых оснащения касается замкнутого ребра, причем на двух концах это прямые из разных семейств. Многообразие должно быть ориентируемо в окрестности графа.



a)



b)

Рис. 6.

Продолжим вложение до диффеоморфизма окрестности I-графа, изображенной на рис. 6*b*, на регулярную окрестность образа, который согласуется с оснащениями. Такой диффеоморфизм определен с точностью до изотопии, связанной на графе. Перенесем, с помощью этого диффеоморфизма, в многообразие M две изображенных на границе окрестности кривых. Вырежем из M окрестность графа, приклеим вдоль указанных кривых ручки индекса 2, затем ручку индекса 3. Получится новое многообразие. Описанный процесс будет называться I-*переклейкой*.

Теорема 3.2. *Если хотя бы одна из петель I-графа* Γ *может быть затянута гладким вложенным диском* D, *касающимся оснащения и не задевающим внутренними точками графа, то I-переклейка в окрестности графа* Γ *порождает многообразие диффеоморфное исходному, причем существует единственный, с точностью до связанной изотопии, диффеоморфизм, тождественный вне регулярной окрестности* V *множества* $\Gamma \cup D$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1.2, дополнение регулярной окрестности графа Γ получается из $M \setminus V$ добавлением ручки индекса 1—окрестности диска D, которая сокращается с одной из ручек индекса 2. Вторая ручка индекса 2 оказывается меридианом незаклееной ручки тела V.

Замечание 3.3. Пусть интересующие нас графы пересекают некоторый шар с ручкой только несколькими параллельными линиями, как это показано на рис. 7a. Тогда, после I-переклейки в окрестности показанного там I-графа, которая, в соответствии с теоремой 3.2, не изменит многообразия, эти линии пройдут так, как это показано на рис. 7b.

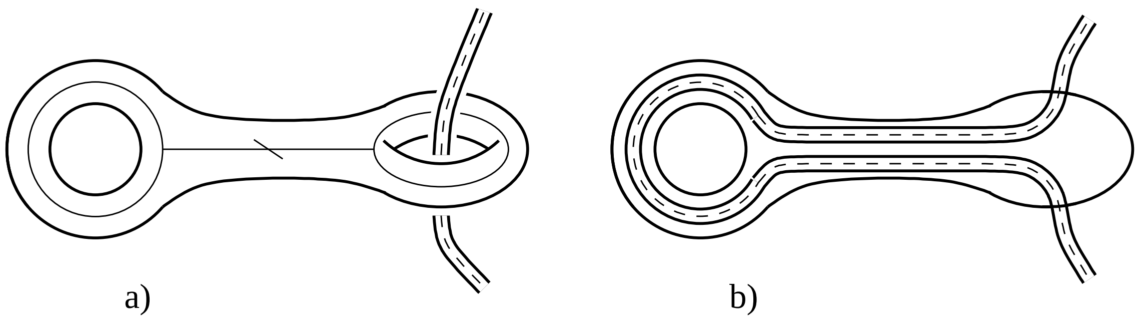


Рис. 7.

Определение 3.4. Пусть обе петли I-графа затянуты гладко вложенными, не пересекающимися, не задевающими внутренними точками I-граф, выходящими на границу в соответствии с оснащениями, определенными с точностью до гомотопии дисками. Тогда этот I-граф называется осью 1-вариации, а I-переклейка в его окрестности—1-вариацией, по отношению к любому графу, не заходящему в эту окрестность.

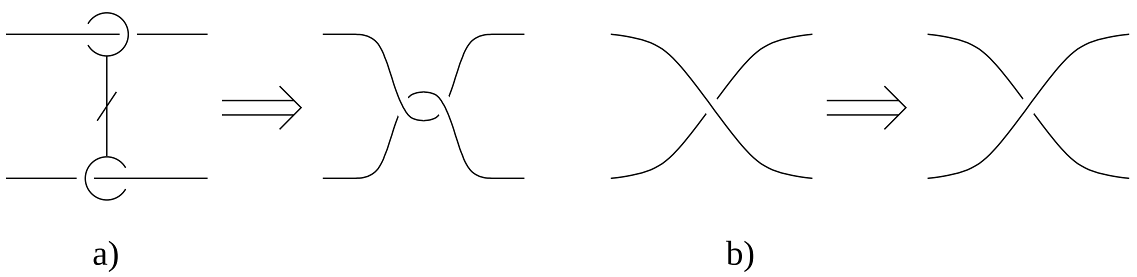


Рис. 8.

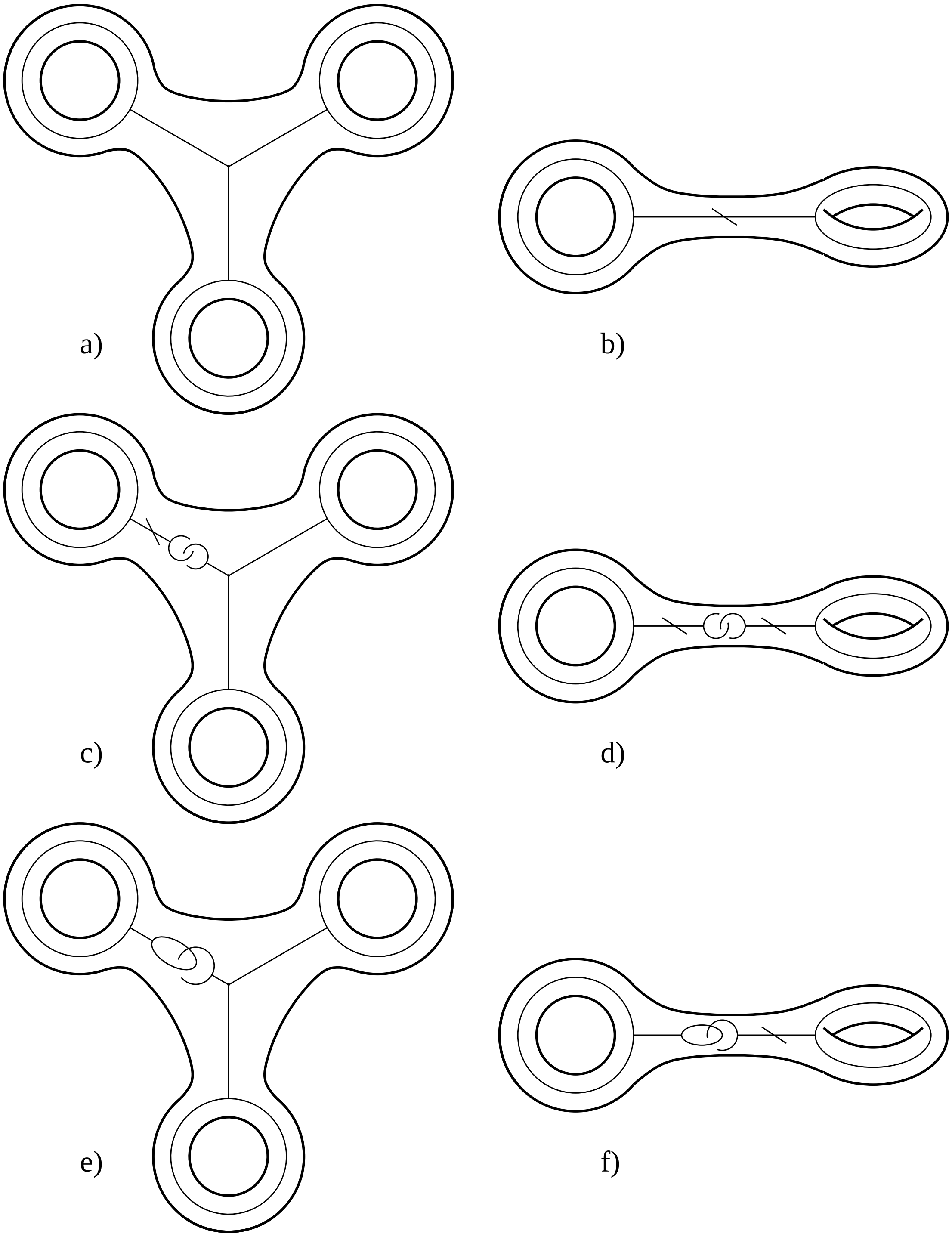


Рис. 9.

Замечание 3.5. Пусть диски оси 1-вариации, каждый в одной точке, трансверсально пересекают граф. Тогда ось 1-вариации, с точностью до несущественной замены локальных объектов инфинитезимальными, совпадает с тем, что в [Г] называлось простым направлением вариации. Сама же переклейка совпадает с перестройкой в этом направлении. На рис. $8a$ изображено действие 1-вариации. Когда ось 1-вариации перпендикулярна плоскости рисунка, получается просто замена прохода переходом (рис. $8b$).

Замечание 3.6. Для 1-вариаций выполняются теорема 2.5 и следствие 2.6. Это очевидное следствие теоремы 3.2.

§4. Геометрические операции с переклейками.

Теорема 4.1. О поперечном разрезании переклеек. *Переклейки шаров с ручками, изображенные на рис.* $9a, b$*, приводят к тем же результатам, что и пары переклеек, изображенные на рис.* $9c, d$ *соответственно. То есть, получающиеся тела диффеоморфны, причем диффеоморфизм может быть выбран тождественным на границе, и тогда он единственен, с точностью до связанной изотопии.*

Доказательство. Применим замечание 3.3 на второй паре рисунков к регулярным окрестностям левых 1-переклеек с затянутыми правыми дисками, как это изображено на рис. $9e, f$ соответственно. Получим то, что изображено на первой паре рисунков. Требуемая единственность—следствие того, что получившиеся тела—тоже шары с ручками, хотя, конечно, их меридианы расположены иначе. Применительно к первой паре рисунков, это видно из определения переклеек.

Теорема 4.2. О продольном разрезании I-переклейки. *Одна переклейка в шаре с тремя ручками на рис.* $10a$ *приводит к тем же результатам, что две переклейки на рис.* $10b$.

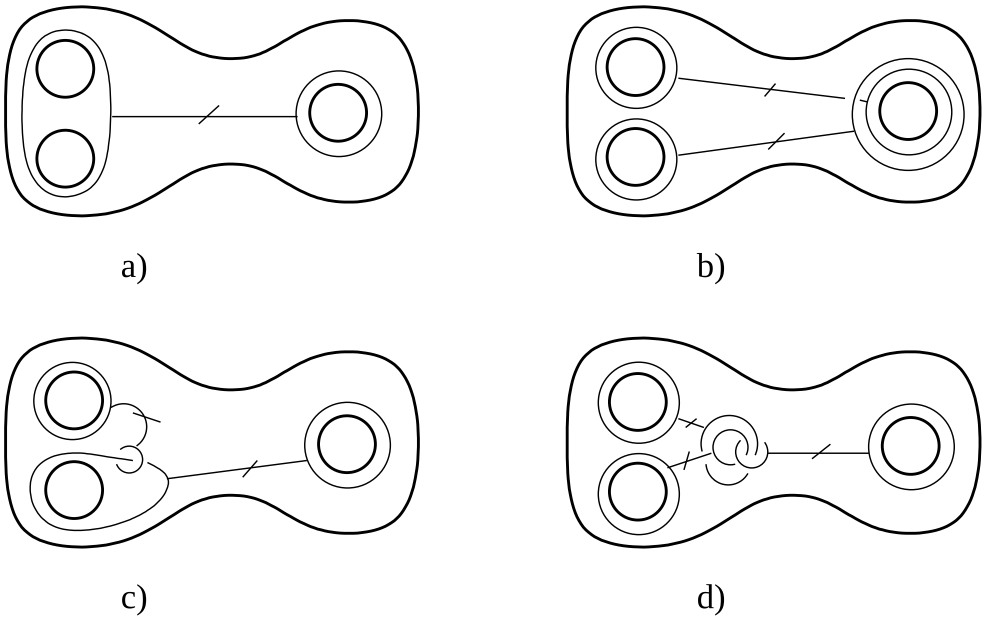


Рис. 10.

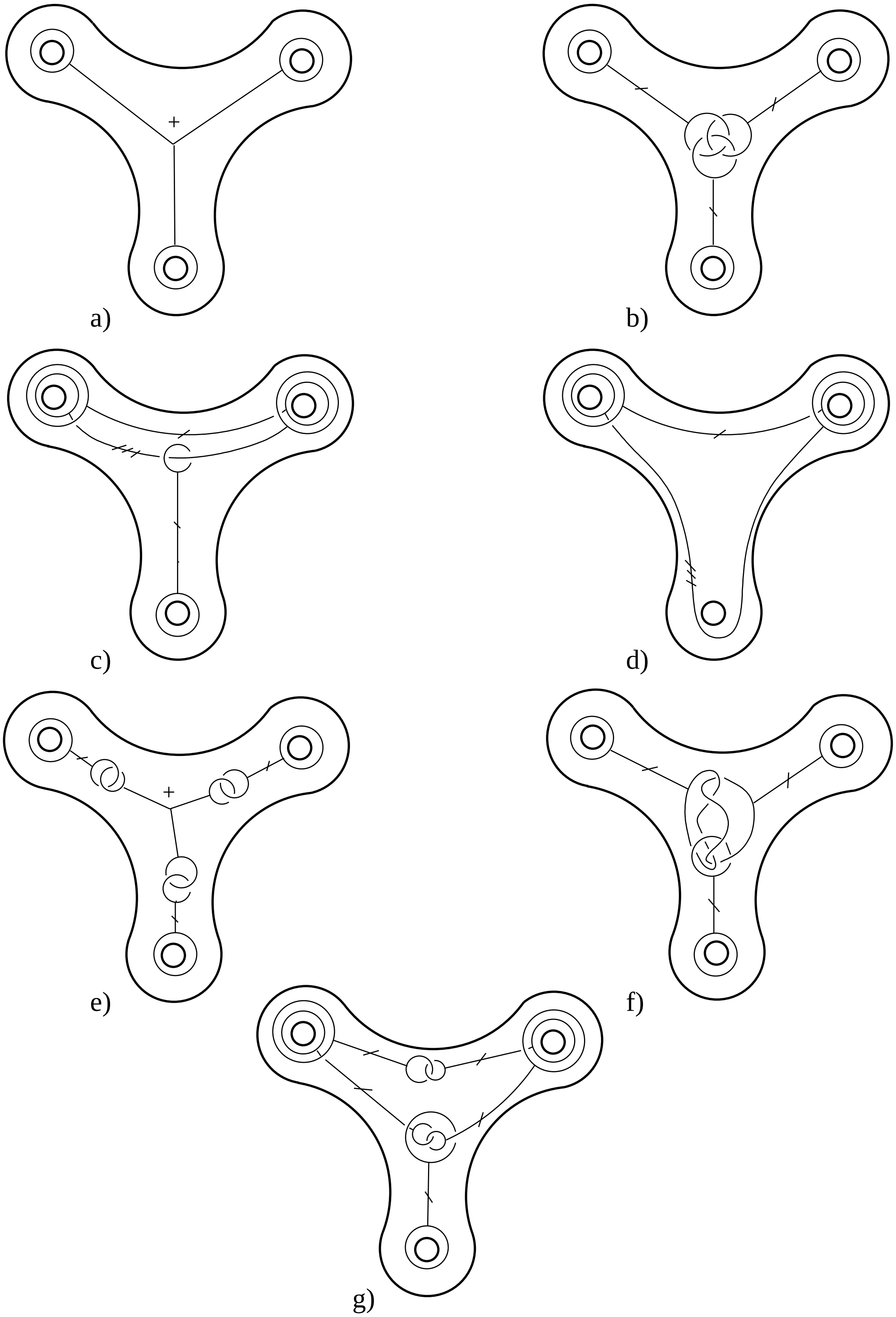


Рис. 11.

Доказательство. Последовательно применяя замечание 3.3, получим из рис. $10a$ рисунки $10c - d - a$. На первом из рисунков видно, что переклеенное тело можно получить приклеиванием одной ручки к шару с ручкой, значит оно—шар с двумя ручками, и проблем с единственностью отождествления не возникает.

Теорема 4.3. О разрезании Y-переклейки на I-переклейки. *Одна Y-переклейка, изображенная на рис.* 11*a приводит к тем же результатам, что и группы I-переклеек на рисунках:*

$11b$ — *симметричное разрезание на три I-переклейки,*

$11c$ — *асимметричное разрезание на три I-переклейки,*

$11d$ — *разрезание на две I-переклейки.*

Доказательство. Трижды разрежем Y-переклейку на рис. $11a$, чтобы получить рис. $11e$. Воспользуемся замечанием 1.3, чтобы получить рис. $11b$. Деформируем петли как на рис. $11f$. Теперь видно, что рис. $11g$ можно получить из рис. $11f$ продольным, а из рис. $11c$ — поперечным разрезанием двух I-переклеек. Рис. $11d$ получается из рис. $11c$ применением замечания 3.3.

Теорема 4.4. Об обращении I-переклейки. *В регулярную окрестность I-графа можно вложить другой I-граф так, что в результате I-переклеек в окрестностях этих двух I-графов (окрестности, конечно, предполагаются непересекающимися и содержащимися в исходной) исходная окрестность не изменится. Некоторые варианты такого вложения приведены на рис.* $12a - -c$.

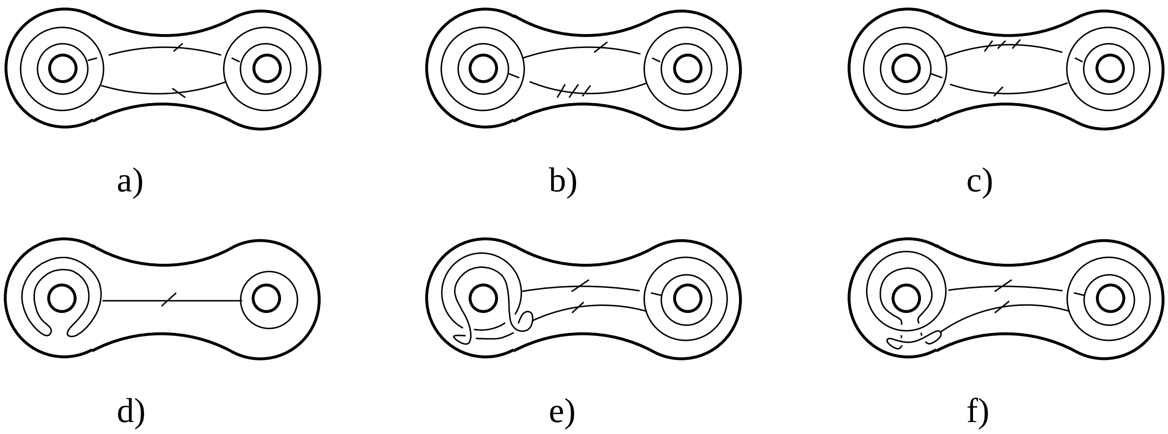


Рис. 12.

Доказательство. На рис. $12d$ изображен I-граф со стягиваемой петлей, переклейка в его окрестности ничего не изменит. Разрежем ее вдоль, как показано на рис. $12e$ или на рис. $12f$. Получатся варианты, изображенные на рис. $12a$ и b соответственно. Если повернуть рис. $12b$ на пол-оборота вокруг горизонтальной оси, то получится рис. $12c$.

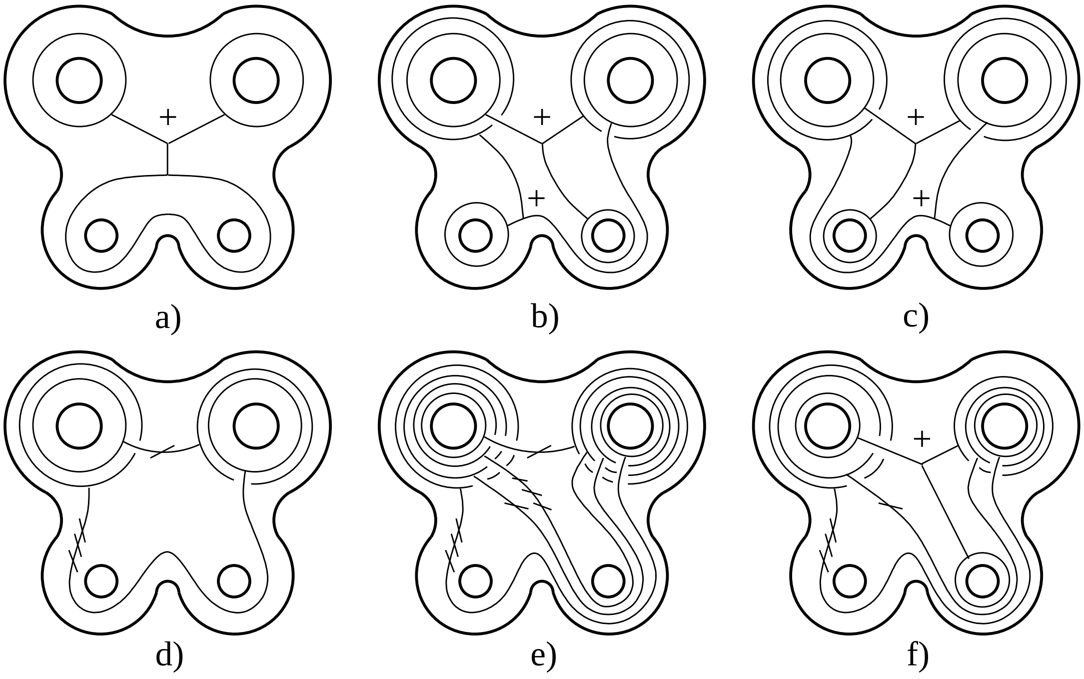


Рис. 13.

Теорема 4.5. О продольном разрезании Y-переклейки . *Изображенная на рис.* 13a *Y-переклейка шара с четырьмя ручками приводит к тому же результату, что и две Y-переклейки, изображенные на рис.* 13b *или* c.

Доказательство. Разрежем Y-переклейку на две I-переклейки (рис. 13d). Добавим две взаимно обратные I-переклейки (рис. 13e, ср. рис. 12c). Соберем пары I-переклеек в Y-переклейки (рис. 13f,b). Если, двигаясь против часовой стрелки, поменять местами нижние дырки, то на рис. 13a ничего не изменится, а рис. 13b перейдет в рис. 13c.

Замечание 4.6. Получившиеся при разрезании Y-переклейки половинки не равноправны. У одной из них (левой на рис. 13b и правой на рис. 13c) пара ребер, соединяющая верхние петли, зацепилась за одну из нижних дырок. Такая половинка будет называться плохой, а другая — хорошей.

Теорема 4.7. Об обращении Y-переклейки. *В регулярную окрестность Y–графа можно вложить другой Y-граф так, что в результате Y-переклеек в окрестностях обоих этих графов исходная окрестность не изменится. Пример такого вложения изображен на рис.* 14a.

Доказательство. Обратная переклейка на рис. 14a — это плохая половинка, образовавшаяся при разрезании вдоль изображенной на рис. 14b Y-переклейки. Последняя не меняет тела, потому что на ее нижнюю петлю можно натянуть диск.

§5. О подобии вариаций.

Теорема 5.1. О меридианах n-вариации. *На крае шара с* $n+1$ *ручками, явля-*

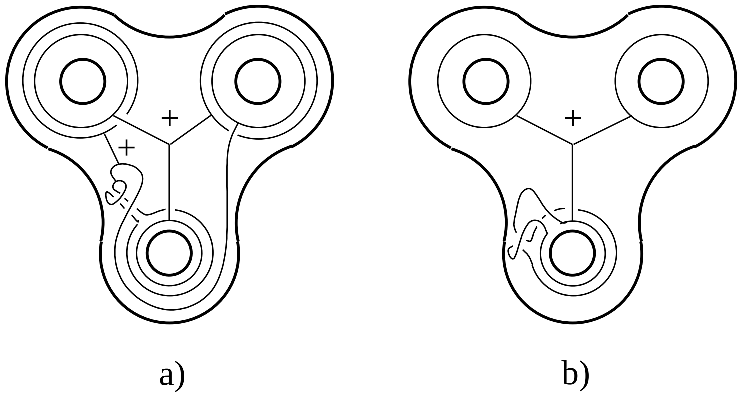


Рис. 14.

ющегося регулярной окрестностью оси n-вариации (рис. 15a), рассмотрим два семейства по $n+1$ простых замкнутых кривых. Кривые одного из них, параллели, получаются как линии пересечения этого края с дисками, затягивающими петли оси. Кривые, принадлежащие другому семейству должны стягиваться малыми дисками, пересекающими соответствующие петли оси; они будут называться старыми меридианами. Утверждается, что на нем найдется еще одно семейство из $n+1$ непересекающихся простых замкнутых кривых, которые будут называться новыми меридианами, и для которых выполнены следующие условия:

(1) новый меридиан пересекает только одну параллель, ровно в одной точке, причем он не пересекает соответствующий ей старый меридиан;

(2) после совершения в рассматриваемом шаре с ручками переклеек, соответствующих n-вариации, получится тело, в котором на новые меридианы можно натянуть гладко вложенные, непересекающиеся диски;

(3) разрезание по указанным дискам превращает указанное тело в шар.

Таким образом, n-вариация может быть описана как вырезание регулярной окрестности ее оси и вклеивание вместо нее другого шара с $n+1$ ручками.

Доказательство. Для 1- и 2-вариаций все обстоит так, как требуется, по определению. Далее будем действовать по индукции. Разделим одно из внутренних ребер оси, как это требуется в пункте (2) определения 2.2. Ось разделится на две меньших оси. Очевидно, что нужно сделать, в точности, переклейки соответствующие этим двум осям. Регулярную окрестность большой оси можно, с точностью до сглаживания, разрезать на регулярные окрестности малых осей (рис. 15b). Разрезание происходит по тору с дыркой, который, в другой проекции изображен на рис. 15c. Для удобства изображения в нем проделаны четыре больших дырки.Пунктирная линия u является параллелью в ближнем и меридианом в дальнем теле. Пунктирная линия v — наоборот, меридианом в ближнем и параллелью в дальнем теле. По индуктивному предположению, как в ближнем, так и в дальнем теле имеется система новых меридианов. Каждый из них не пересекается либо с параллелью, либо с меридианом новой ручки, то есть либо с u, либо с v. Значит они могут заходить в рассматриваемую перегородку дугами, изотопными либо AB, либо CD, либо отрезку границы.

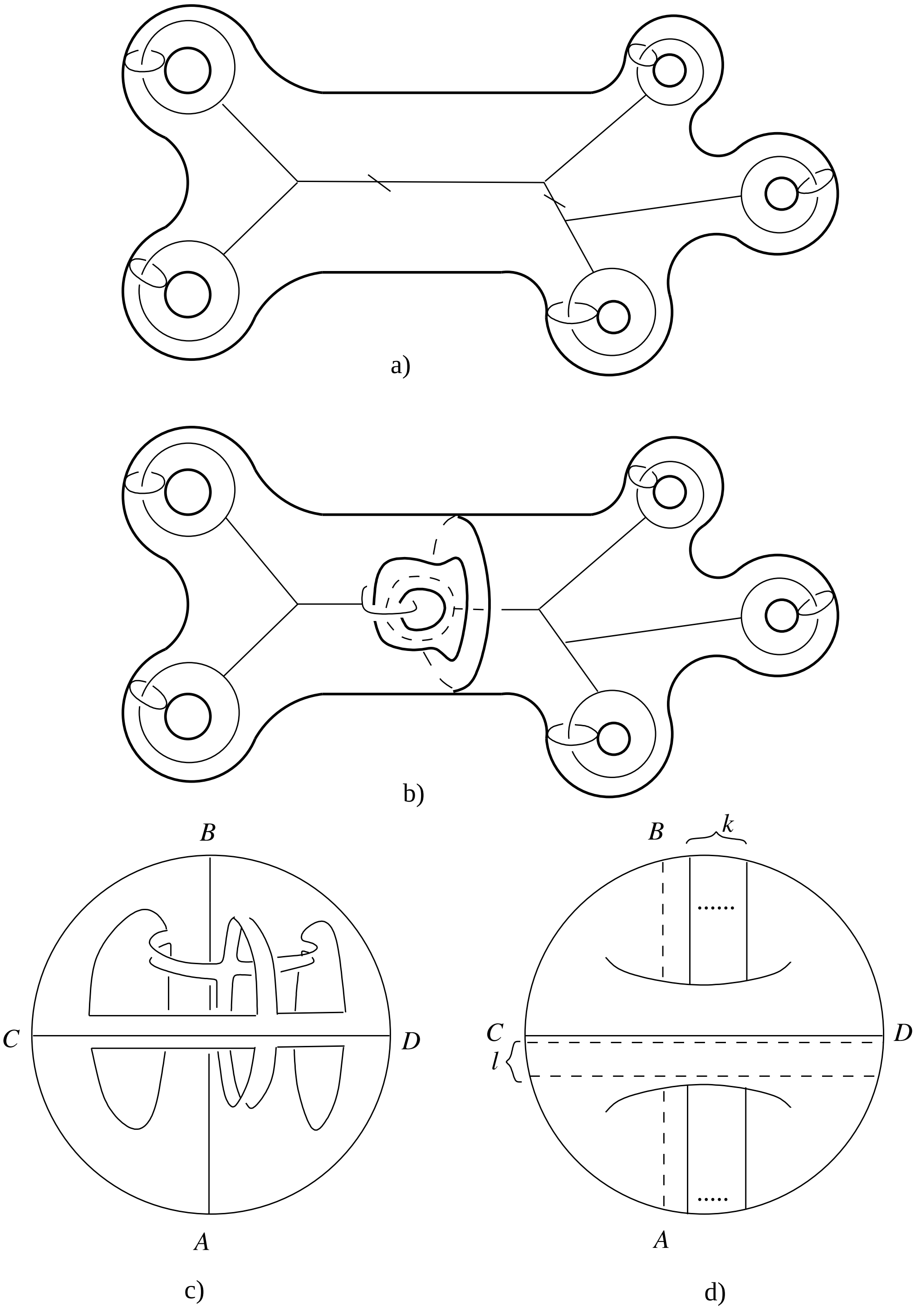


Рис. 15.

Последние могут быть выведены за пределы перегородки. Остальные можно выпрямить, чтобы они шли параллельно указанным линиям. Теперь меридиан ближнего тела, соответствующий новой ручке, проходит только один раз вдоль CD. Остальные его меридианы могут несколько раз проходить вдоль AB. Для дальнего тела —

все наоборот: меридиан новой ручки проходит один раз вдоль AB, а остальные — несколько раз вдоль CD. Изобразим меридианы ближнего тела сплошными, а дальнего — пунктирными линиями (рис. 15d).

Возьмем, по числу отрезков меридианов старых ручек ближнего тела параллельных AB, k экземпляров диска, стягивающего меридиан дальнего тела, соответствующий новой ручке. Расположим их параллельно друг другу так, чтобы их края выходили на перегородку по этим отрезкам, а потом приклеим к стягивающим меридианы ближнего тела дискам. Аналогично, к дискам, стягивающим меридианы старых ручек дальнего тела, приклеим l параллельных копий диска, стягивающего меридиан новой ручки ближнего тела. Теперь каждой ручке исходного тела соответствует диск, край которого и будет новым меридианом. Выполнение пунктов (1) и (2) очевидно.

Посмотрим, как склеивается дополнение этих дисков. Дальнее тело, за счет дублирования одного из дисков, разбито на k шаров. Ближнее, аналогично, разбито на l шаров. Склеивание происходит по $l-1$ горизонтальным, $k-1$ вертикальным полоскам и одной внешней области, которая тоже гомеоморфна кругу. Склеив $k+l$ шаров по $k+l-1$ кругам можно получить только шар. Следует заметить, что результат обязательно связен, поскольку новые меридианы не разбивают край тела. Нереализуемый случай, когда k или l равно 0, легко исключить, заставив один из меридианов пройти туда и обратно по перегородке.

Определение 5.2. Назовем *областью действия* n-вариации регулярную окрестность ее оси в исходном положении и вклеенный вместо нее шар с ручками в измененном положении.

Замечание 5.3. Область действия n-вариации определена с точностью до изотопии. Если до вариации она имеет видимую ось, положением которой и определяется, то после вариации такой оси уже нет. Можно, конечно, отметить какую-нибудь ось, определяющую это тело. Теорема 5.1 не дает конкретного вида такой оси. Следует помнить, что при изотопии нужно следить за вложением тела, а не только за образом этого вложения. Если область действия n-вариации фиксирована, то любому объекту, не заходящему в эту область, в положении после вариации можно поставить в однозначное соответствие тот же объект в положении до вариации. Это соответствие обратно рассматриваемой n-вариации.

Определение 5.4. Назовем *независимыми* вариации, оси которых можно заключить в непересекающиеся шары, вместе с какими-нибудь представителями дисков, стягивающих их петли.

Мотивировка. Поскольку все изменения, которые вносит n-вариация, можно считать локализованными в ее шаре, совершение каких-либо из независимых вариаций не может помешать проведению остальных (спутав, например, их петли), равно как и повлиять на характер происходящих при этом отождествлений. Способ переклейки еще более устойчив: достаточно чтобы оси не пересекались. Результат применения независимых вариаций не зависит от порядка их применения, их можно считать и одновременно происходящими. Определенная независимость набора вариаций дает больше, чем попарная независимость.

Определение 5.5. Пусть имеются две оси n-вариации с фиксированными дисками, трансверсально пересекающими преобразуемый граф, причем в одних и тех же точках. Они будут называться *подобными*, если существует изотопия одной из этих осей (вместе с дисками), неподвижная в исходных точках пересечения с преобразуемым графом, в результате которой она полностью, включая диски и оснащения, совместится со второй осью. Предполагается, что в процессе изотопии ось и диски могут произвольно пересекать преобразуемый граф, но в исходных точках пересечения касательные плоскости к дискам остаются неподвижными или, во всяком случае, трансверсальными к графу.

Замечание 5.6. Вместо того, чтобы рассматривать гомотопию оси с дисками, то есть объекта двумерного, можно действовать таким образом. Точки пересечения дисков с графом соединим в этих дисках с точками присоединения дисков к оси гладкими непересекающимися линиями, причем соответствующим друг другу способом для двух осей. Линии оснастим нормалями к дискам. Теперь можно следить только за изотопией оснащенных графов, поскольку можно сначала втянуть диск в регулярную окрестность добавленных линий (см. рис. 16), потом провести изотопию вместе с этой окрестностью и снова развернуть.

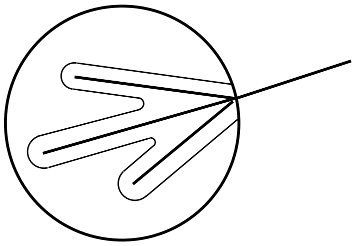


Рис. 16.

Замечание 5.7. Оснащенные графы, за изотопией которых нужно следить, в соответствии с предыдущим замечанием, являются деревьями, поэтому вместо изотопии достаточно иметь регулярную гомотопию. Действительно, в общем положении такая гомотопия имеет только особенности, состоящие в том, что одна из ветвей переходит на другую сторону от другой ветви. Поскольку регулярная окрестность дерева является шаром, можно идти не сквозь нее, а вдоль ее края. Нужно только обходить с правильной стороны — не с той где находится обходящая дуга (см. рис. 17).

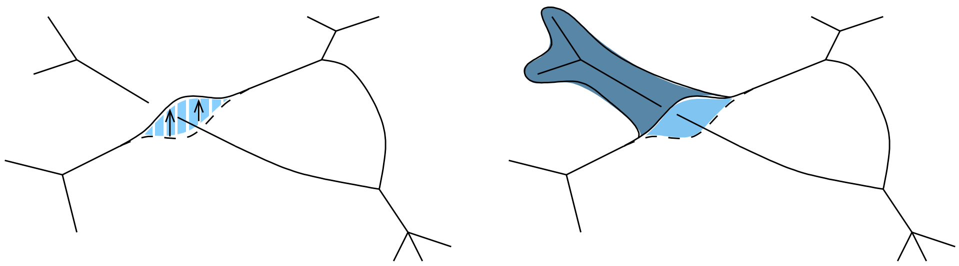


Рис. 17.

Теорема 5.8. Об инвариантности подобия. *Пусть имеются две оси k-вариации с фиксированными дисками, и пусть ось некоторой n-вариации их не пересекает. Утверждается, что эти оси k-вариации будут подобны после n-вариации, если и только если они были подобны до нее.*

Доказательство. В соответствии с замечанием 5.7, будем следить за гомотопией оснащенных графов. Пока граф не заходит в область действия n-вариации, никаких проблем не возникает. Поскольку эта область может рассматриваться как регулярная окрестность некоторой оси, достаточно проследить, что происходит, когда ребро графа пересекает эту ось. Понятно, что к ребру графа добавится петля, лежащая на крае области действия n-вариации, стягиваемая там и тривиально оснащенная, см. рис. 18. После n-вариации, или, наоборот, перед ней область действия изменится, но петля останется стягиваемой, так как эта область заключена в шар. Достаточно проследить за ее оснащением, причем только за его четностью, так как в процессе регулярной гомотопии легко подкрутить его на четное число оборотов. Оснащение можно считать нормальным оснащением в крае рассматриваемой области действия, и, значит, нам требуется четность коэффициента самозацепления, представленного петлей класса гомологий в этом крае.

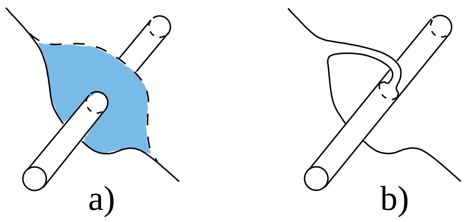


Рис. 18.

Стягиваемая петля гомологична линейной комбинации меридианов, которые не пересекаются между собой. Значит, для ее четности достаточно четности коэффициентов самозацепления этих меридианов (старых — в новом шаре, или новых — в старом). Но класс гомологий нового меридиана, как следует из теоремы 5.1, может отличаться от класса старого только классами параллелей, причем тех, которые с ними не пересекаются (на самом деле, при $n > 1$, они совпадают). Параллели ограничивают вне области действия n-вариации, и, конечно, не пересекаются, поэтому любые их комбинации имеют четный коэффициент самозацепления. Значит и четности коэффициентов самозацепления старого и нового меридианов совпадают, то есть они четны, так как один из меридианов ограничивает.

Замечание 5.9. В дальнейшем классы подобия осей до и после n-вариации будут отождествляться между собой. Теорема 5.8 гарантирует взаимную однозначность такого отождествления. Чтобы применить ее, достаточно, с учетом замечаний 5.6 и 5.7, вывести граф из области действия вариации, что не представляет труда, так как эта область — шар с ручками. Следует заметить, что если даже преобразуемый граф, после нескольких вариаций, в каком-нибудь смысле вернулся на место, старые классы подобия нельзя, вообще говоря, отождествлять с новыми — могут быть нетривиальные голономии.

Теорема 5.10. О независимости вариаций. *Пусть к графу последовательно применено несколько вариаций произвольных порядков. Пусть у осей этих вариаций фиксированы диски. Тогда для исходного графа найдутся оси, подобные этим осям, которые определяют независимые вариации, приводящие к тому же результату, что и исходные. Ось первой вариации можно сохранить без изменений.*

Доказательство. Будем действовать поэтапно, начиная с последней вариации. На каждом этапе перед нами будет несколько независимых вариаций результата некоторой вариации. Нужно будет, с соблюдением требований теоремы, найти для них прообразы.

Диски совершенной вариации пересекали край регулярной окрестности ее оси по параллелям. После вариации их части, не входящие в область действия вариации, остаются дисками, затягивающими параллели этой области. Пошевелим их, чтобы они не содержали вершин графа и точек его пересечения с дисками предстоящих операций, а также трансверсально пересекали его ребра. Добавим к области вариации регулярные окрестности выбранных дисков. Она превратится в шар, причем можно считать, что окрестности дисков образуют в нем параллельные трубки. Можно также считать, что ребра графа проходят через них параллельными отрезками (рис. 19).

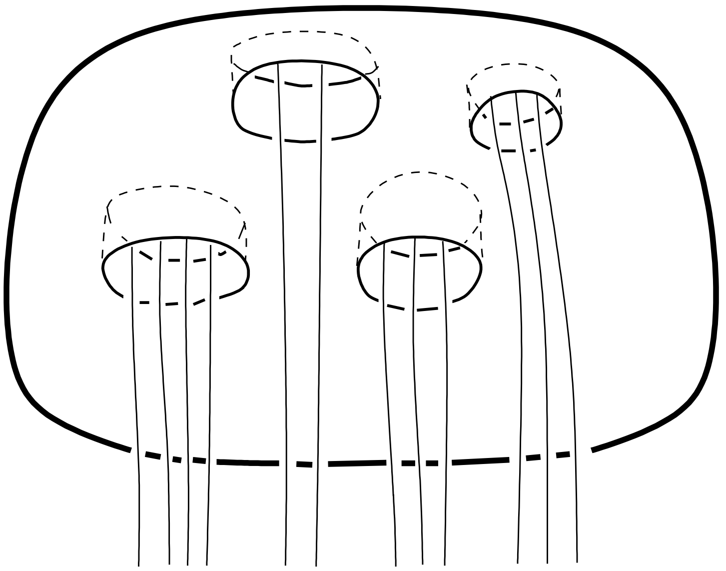


Рис. 19.

Понятно, что оси предстоящих вариаций можно вывести изотопией за пределы рассмотренного шара так, чтобы они не задели при этом граф. Затем надо вывести из этого шара диски осей, что совсем просто, так как не надо следить за взаимным положением с графом. У каждой оси два комплекта дисков: один для независимости, а другой для подобия. С обоими мы можем действовать вместе или по отдельности.

Фиксированные точки во втором комплекте находятся за границей шара и, поэтому, не мешают. Изотопия не изменила ни результата предстоящих вариаций, ни классов подобия их осей, но теперь их можно заключить в шары, которые не пересекаются между собой и с шаром, содержащим сделанную вариацию. Прообразы этих осей удовлетворяют требованиям теоремы, а прообразы шаров доказывают независимость вариаций. Нужно только заметить, что, хотя область вариации изменилась, прообраз окружающего ее шара является шаром. Действительно, это шар с ручками, параллели которого заклеены.

Следствие 5.11. *Пусть имеется несколько непересекающихся осей вариации предназначенных для последовательного применения, то есть оси следующих вариаций изменяются предыдущими. Пусть у этих осей фиксированы диски, причем оси предыдущих вариаций не пересекают дисков следующих. Тогда найдутся подобные им оси, соответствующие которым вариации будут независимы, но приведут к тому же результату, что и исходные. Можно считать, что каждая из осей совпадает с соответствующей ей новой вне объединения регулярных окрестностей осей предыдущих вариаций (с дисками).*

Доказательство. Новые оси получаются применением теоремы 5.10 к образам исходных. Подобие гарантирует теорема 5.8.

§6. Геометрические операции с вариациями.

На рисунках этого параграфа пунктирная внутренняя вершина (рис. 20a) обозначает продолжение оси за пределами рисунка, причем, если пунктирная часть ребра действительно ведет к внутренней вершине, то на ней должно быть четное число штрихов. Вместо этого оно может вести к концевой вершине, но тогда на нем должно быть нечетное число штрихов. В частности, рис. 20a может обозначать и рис. 20b.

a) b)

Рис. 20.

Если серия рисунков описывает операцию, то предполагается, что в некотором изображаемом шаре все обстоит так, как нарисовано (неопределенность возможна в обведенных пунктирной рамкой местах). В регулярных окрестностях пунктирных частей осей первого рисунка может быть некоторая неопределенность, а в остальных местах просто ничего не меняется. Неопределенность, обычно, состоит в возможности прохождения определенных с точностью до подобия осей.

Теорема 6.1. О поперечном разрезании вариации. *Если ребро оси n-вариации разрезать на две части, снабдив их зацепленными между собой петлями (см. рис. 21), то получатся оси двух зависимых вариаций. Сумма их порядков равна $n+1$.*

Совместное их применение (в любом порядке) эквивалентно применению разрезанной вариации. Каждая из них, примененная в отдельности, не меняет исходного графа.

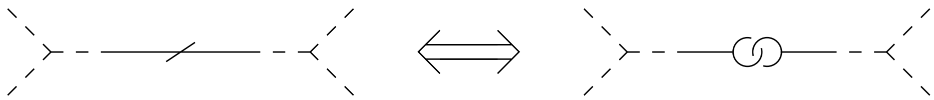


Рис. 21.

Доказательство. Чтобы проверить, что получились оси вариаций, достаточно проверить количество штрихов на новых ребрах: оно нечетно для 1-вариации и четно для прочих. Поскольку добавилось две новых вершины, суммарный порядок вариаций возрос на 1. У каждой из новых осей вариации есть не зацепленная с графом петля, значит, в силу следствия 2.6, можно считать, что определяемая ею вариация оставляет граф неподвижным. Если разрезано внутреннее ребро, то можно считать, что это одно из разрезаний второго этапа вариации (пункт (2) определения 2.2), и для совершения разрезанной вариации нужно совершить точно те же переклейки, что для обеих частей вместе. Для концевого ребра надо воспользоваться еще теоремой 4.1.

За конкретными отождествлениями можно не следить, считая, что все происходит внутри шара — регулярной окрестности исходной оси (вместе с дисками). Аналогично обстоит дело и в других теоремах этого параграфа.

Теорема 6.2. О воссоединении вариации. *Пусть вариация с осью T разрезана поперек на вариации с осями T_1 и T_2. Пусть имеется еще несколько новых осей независимых вариаций, с фиксированными дисками, не пересекающих оси T_1 и T_2. Тогда найдутся подобные этим осям оси вариаций, которые независимы между собой и с вариацией, имеющей ось T, такие, что применение всех этих вариаций эквивалентно применению исходных независимых вариаций и вариаций с осями T_1 и T_2.*

Доказательство. Пошевелим диски оси T так, чтобы они не содержали точек пересечения дисков новых осей с графом. Ее регулярной окрестностью (с новыми дисками) будет шар, не содержащий этих точек. Можно считать, что вариации с осями T, T_1 и T_2 не затрагивают дополнение этого шара. Поскольку вариация с осью T эквивалентна совместному применению вариаций с осями T_1 и T_2, можно считать, что на ее результате определены образы новых осей при совместном применении вариаций с осями T_1 и T_2. По теореме 5.10, найдем прообразы этих осей. Надо только доказать, что они подобны исходным осям.

Возьмем какую-нибудь из новых осей (T_3). Найдем ось T_4, подобную T_3 и не заходящую в выбранный шар. Ее образ при вариациях T_1 и T_2 подобен образу оси T_3, а его прообраз — прообразу. Но и образ, и прообраз совпадают с T_4. Значит, она подобна и оси T_3, и оси из нее получившейся, а, следовательно, они подобны между собой.

Теорема 6.3. О продольном разрезании вариации. *Пусть один из дисков D оси n-вариации T (с фиксированными дисками) разбит на две части линией, выходящей* *из вершины и не пересекающей граф (рис. 22a). Пусть оси T_1 и T_2 получены из оси T отбрасыванием одной из частей и сглаживанием другой (рис. 22b). Тогда найдется ось T_3, подобная оси T_2, такая, что вариации с осями T_1 и T_3 независимы, а их совместное применение эквивалентно вариации с осью T. Первая будет называться хорошей, а вторая — плохой половинкой исходной вариации.*

Можно считать, что оси T_2 и T_3 совпадают вне регулярной окрестности оси T_1.

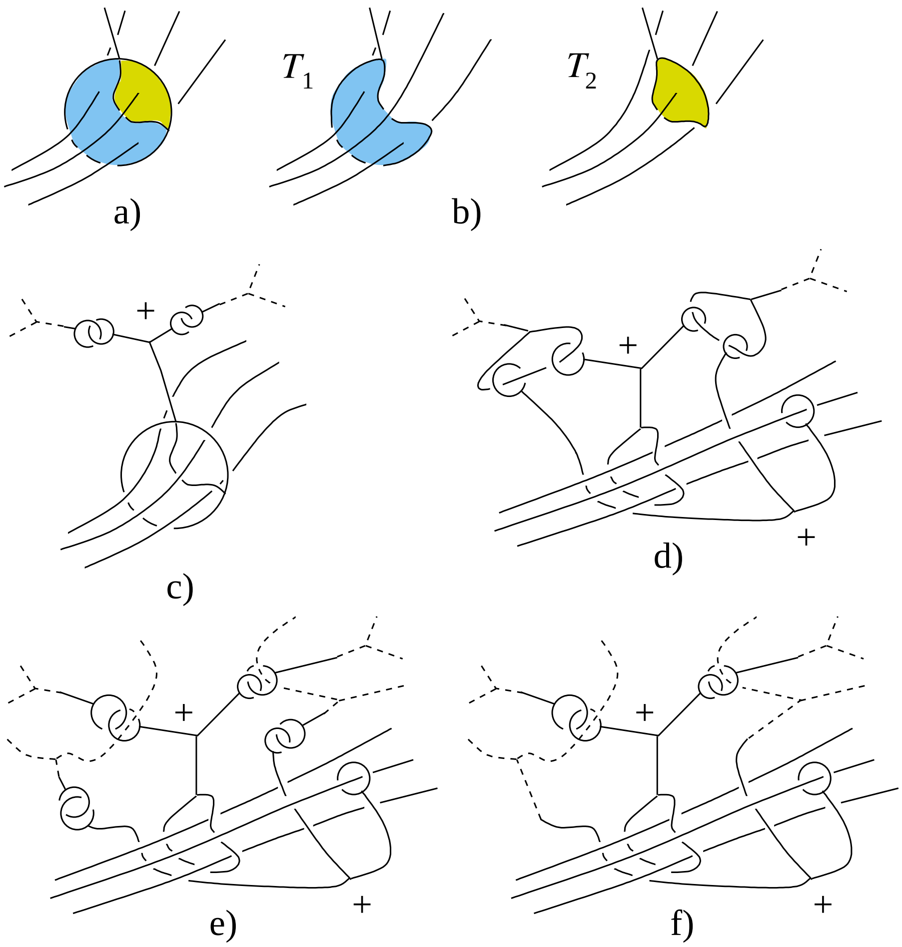


Рис. 22.

Доказательство. Для $n = 1$ или 2 нужно просто разрезать вдоль, соответственно, I- или Y-переклейку . Для вариации большего порядка построим, как положено по определению, цепочку Y-графов. Будем последовательно разрезать вдоль определяемые ими переклейки. Начнем с той, в которую входит разделенная петля. Часть, отвечающая оси T_1, должна войти в хорошую половинку. Далее будем переходить к соседним, разрезая их так, чтобы петля хорошей половинки зацеплялась за петлю хорошей, а петля плохой половинки — за петлю плохой (рис. 22c – e). Отметим, что плохие половинки проходят через петли хороших, но не наоборот. Поэтому, плохие половинки можно собрать в одну n-вариацию с осью T_4, которую можно выбрать подобной оси T_2 (рис. $22f$).

Применение разрезаемой n-вариации эквивалентно применению n-вариации с осью T_4, а потом — хороших половинок Y-переклеек. Можно поменять порядок действий: сначала сделать Y-переклейки, а потом — n-вариацию с преобразованной ими осью T_4 (обозначим ее T_5). Здесь, как и ранее, мы не следим за отождествлениями — все происходит внутри шара. Считая Y-переклейки 2-вариациями, можно последовательно воссоединить их в вариацию с осью T_1. При этом ось T_4 превратится в ось, которую можно взять в качестве T_3.

Теорема 6.4. О вытаскивании n-вариации. *Пусть ребро оси n-вариации зацеплено за ребро преобразуемого графа (рис. 23a). Тогда применение этой n-вариации эквивалентно применению двух вариаций, ось первой из которых отличается от оси данной только тем, что отцеплена (в этом месте) от графа. Ось второй, $(n+1)$-вариации, подобна той, которая получается если соединить ребро первой с ребром графа, от которого оно отцеплено, новым ребром с петлей на конце (рис. 23b).*

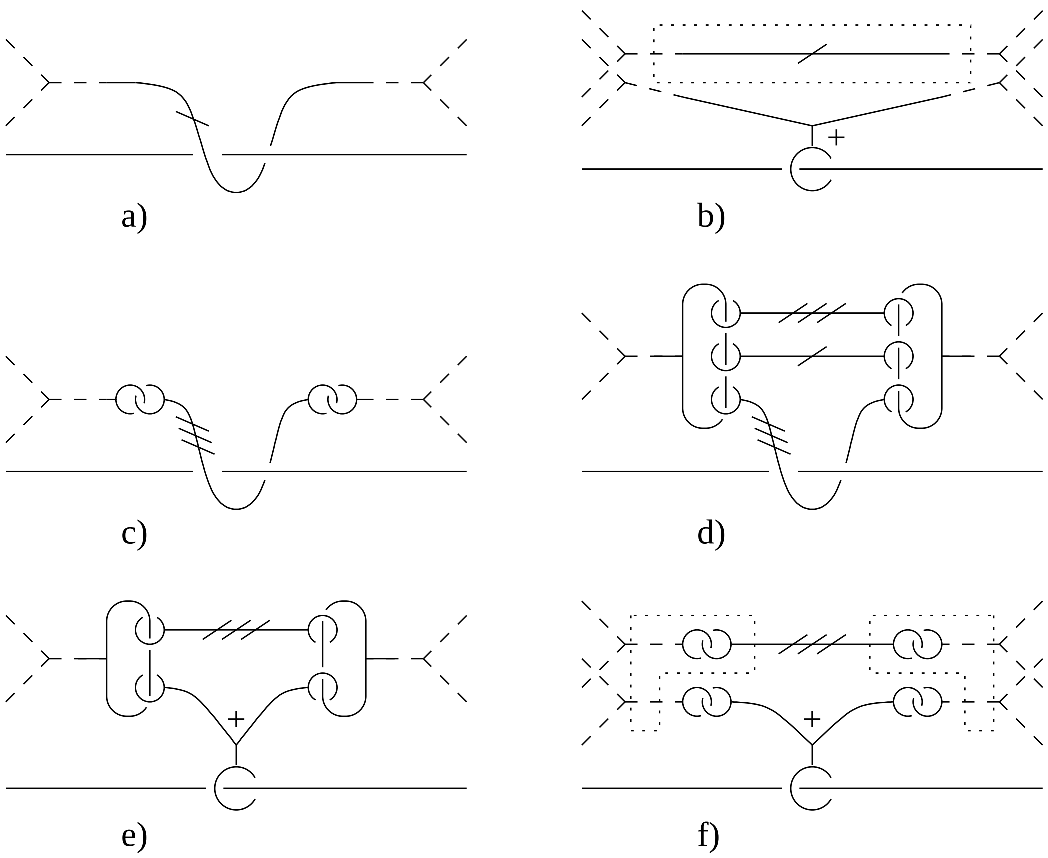


Рис. 23.

Доказательство. Разрежем вариацию поперек, по обе стороны точки зацепления (рис. $23c$). Добавим две взаимно уничтожающиеся I-переклейки (рис. $23d$). Объединим две I-переклейки в Y-переклейку (рис. $23e$). Разрежем вдоль части n-вариации так, чтобы хорошие половинки сцеплялись с I-, а плохие — с Y-переклейкой (рис. 23f). Остается воссоединить куски разрезанных поперек вариаций.

Теорема 6.5. Об STU**-преобразовании вариаций.** *Если две петли осей двух независимых вариаций зацеплены за одно и то же ребро преобразуемого графа (см. рис. 24a), то можно поменять порядок их зацепления, добавив еще одну независимую вариацию (рис. 24b) — общий результат не изменится. Следует считать, что оси старых вариаций вне рисунка не изменились. Ось новой вариации подобна оси, получившейся склеиванием старых осей, а ее порядок равен сумме их порядков.*

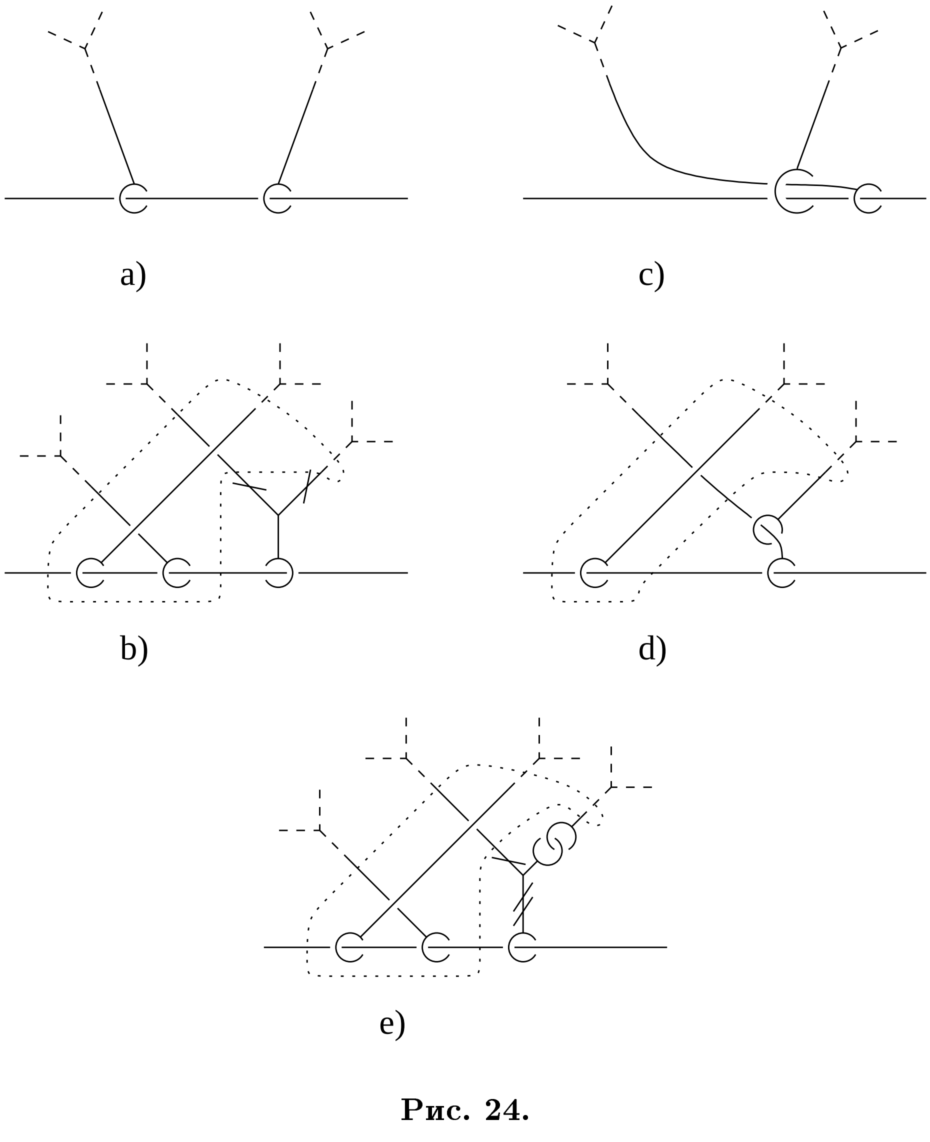


Рис. 24.

Доказательство. Проведем петлю одной вариации (рис. 24c) сквозь петлю другой и разрежем вторую вариацию вдоль (рис. 24d). Теперь можно, по теореме 6.4, вытащить первую вариацию из петли новой (рис. 24e). Новую ось мы в этот момент считаем частью преобразуемого графа. Остается воссоединить куски новой оси. Видно, что у новой оси столько же вершин, сколько у двух старых вместе взятых.

Теорема 6.6. О расцеплении осей вариаций. *Если два ребра осей двух независимых вариаций сцеплены между собой (рис. 25a), то их можно расцепить, добавив еще одну независимую вариацию (рис. 25b) — общий результат не изменится. Следует считать, что оси старых вариаций вне рисунка не изменились. Ось новой вариации подобна оси, получившейся соединением старых осей перемычкой, а ее порядок на 1 больше суммы их порядков.*

Доказательство. Нужно дважды воспользоваться теоремой 6.4 (рис. 25c, d), а потом воссоединить куски новой вариации.

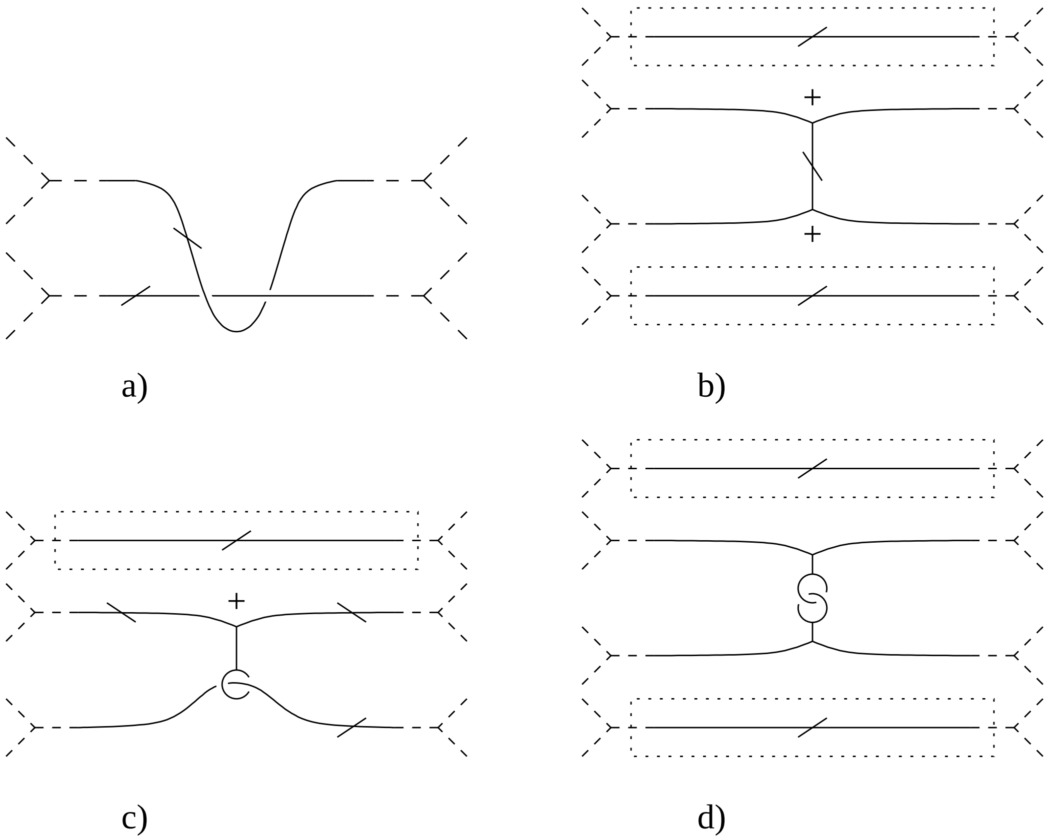


Рис. 25.

Теорема 6.7. Об IHX-преобразовании для вариаций. *Применение одной n-вариации (рис. 26a) эквивалентно применению двух независимых n-вариаций, оси которых подобны изображенным на рис. 26b.*

Доказательство. Разрежем вариацию поперек, выделив две Y-переклейки, и разрежем верхнюю из них на две, а нижнюю, асимметрично, на три I-переклейки, см. рис. 26c. Разрежем поперек одну из I-переклеек и добавим к ней две взаимно уничтожающиеся I-переклейки (рис. 26d), потом объединим асимметрично разрезанную Y-переклейку (рис. 26e). Разрежем вдоль левую нижнюю I-переклейку, поперек — одно из ребер Y-переклейки, добавим еще две взаимно уничтожающиеся I-переклейки (рис. 26f). Снова объединим асимметрично разрезанную Y-переклейку (рис. 26g).

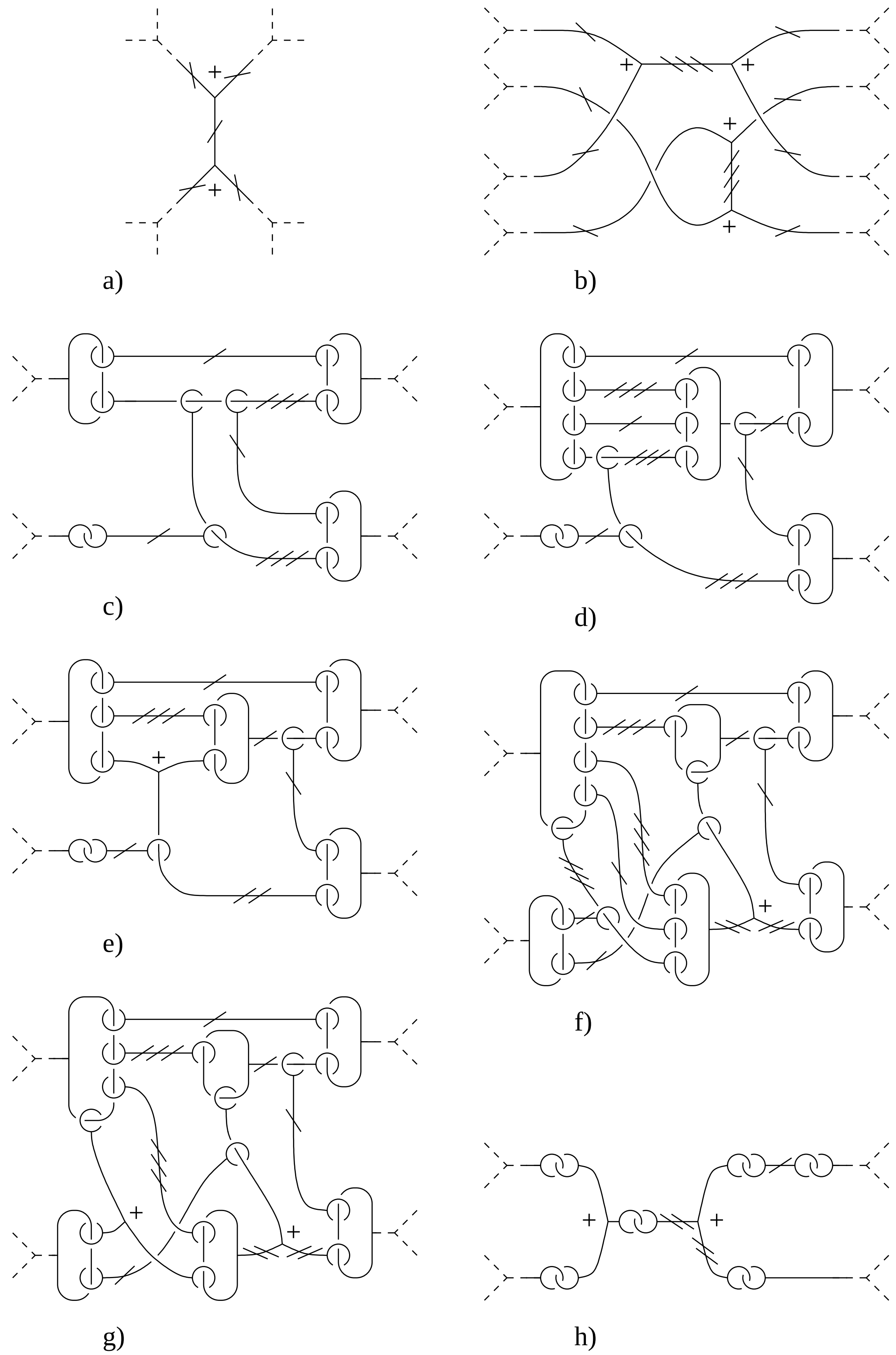
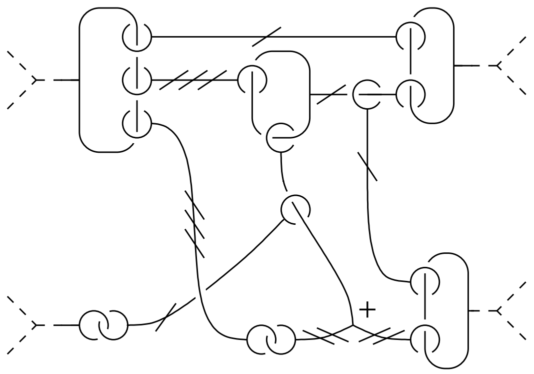
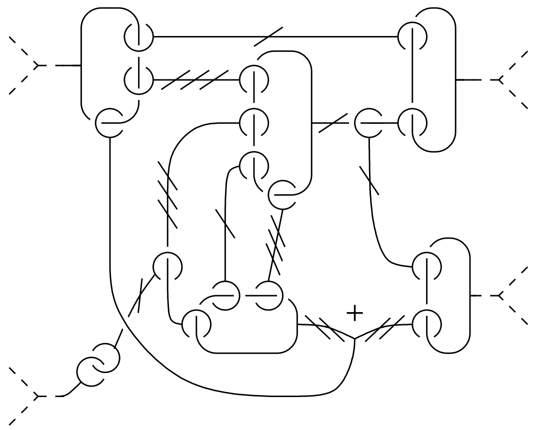


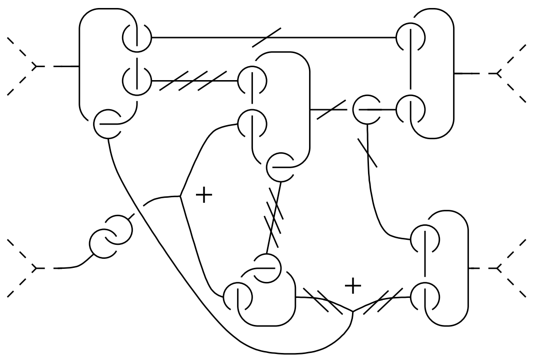
Рис. 26.



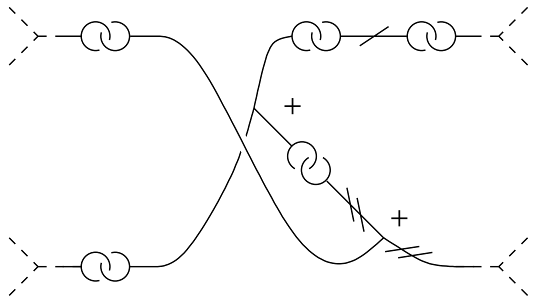
i)



j)



k)



l)

Рис. 26 (продолжение).

Теперь выделим одну из нужных осей, начав от левой Y-переклейки и разрезая вдоль все сцепленные вариации. Нужно каждый раз выбирать плохие половинки. Теорема 6.2 и следствие 5.11 обеспечат ее выделение как независимой, поскольку в ее диски не входят другие оси. Ее можно собрать из частей, изображенных на рис. 26h, а на основном рисунке исключить (рис. 26i). Совершенно аналогично выделяется вторая ось (рис. 26$j - l$).

То, что останется, полностью отсоединено от левой нижней части оси. Мы можем теперь проводить операции в обратном порядке, но, вместо зацепления с этой частью оси, оставлять свободную петлю. Когда мы вернемся к началу, у нас получится ось со свободной петлей, которая определяет тривиальную вариацию. Она просто преобразует выделенные оси в их классах подобия.

Теорема 6.8. О выворачивании вершины. *Применение n-вариации (рис. 27a) эквивалентно применению другой n-вариации, ось которой, с точностью до подобия, отличается от ее оси ориентацией одной из вершин и оснащением двух ребер (рис. 27b).*

Доказательство. Поперечным разрезанием выделим Y-переклейку и разрежем ее на две I-переклейки (рис. 27c). Перекрутим эти переклейки, а петлю нижней части оси

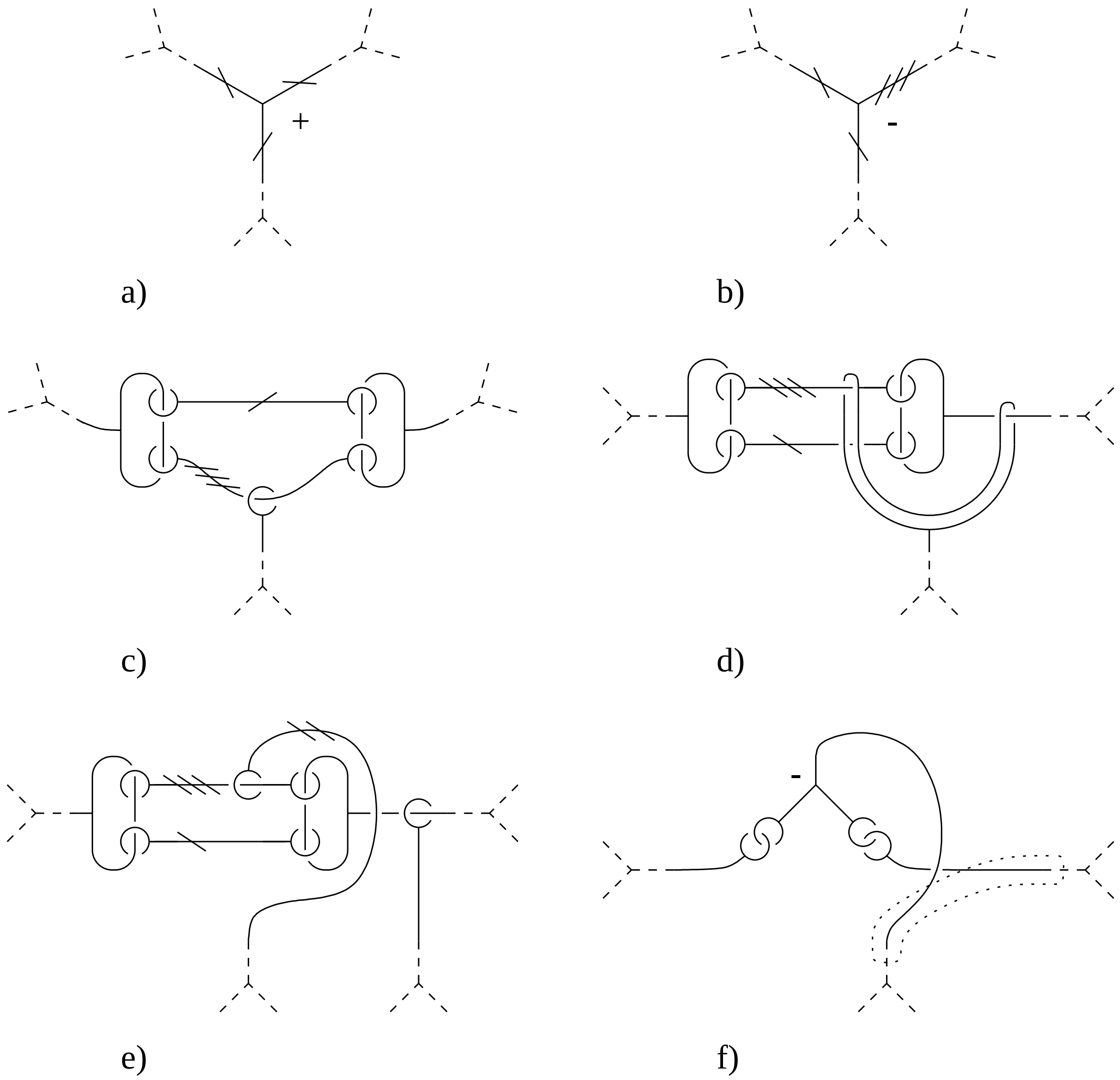


Рис. 27.

разделим на две части (рис. 27d), потом эту часть оси разрежем вдоль (рис. 27e). Хорошей следует считать правую половинку, ее применение ничего не изменит, с точностью до подобия. Соберем разрезанную Y-переклейку, учитывая, что при зеркальной симметрии ориентация вершины меняется (рис. 27f). Далее ось подвергается просто воссоединению и изотопии.

Теорема 6.9. Об обратной вариации. *В регулярную окрестность оси n-вариации можно вложить ось другой, независимой с ней вариации так, что совместное применение этих двух вариаций не изменит преобразуемого графа.*

Доказательство. Рассмотрим вариацию, отличающуюся от обращаемой лишь тем, что одна из петель проходит не только в прямом, но и в обратном направлении (рис. 28). Результат такой вариации, по следствию 2.6, тривиален. Разрежем ее вдоль, чтобы хорошей половинкой была исходная вариация. Тогда плохая половинка

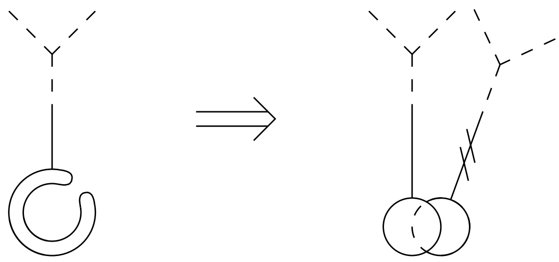


Рис. 28.

может служить обратной вариацией.

§7. Об n-эквивалентности.

Определение 7.1. Два заузленных графа называются *n-эквивалентными*, если один из них может быть получен из другого, с точностью до изотопии, последовательностью вариаций, порядок каждой из которых больше n. (Теорема 6.9 гарантирует корректность такого определения.)

Определение 7.2. Ось n-вариации называется *неразветвленной*, если каждая ее внутренняя вершина соединена ребром хотя бы с одной концевой.

Теорема 7.3. *Заузленный граф может быть, с точностью до изотопии, переведен в любой $(n-1)$-эквивалентный ему граф последовательностью n-вариаций с неразветвленными осями.*

Доказательство. Во-первых убедимся, что любую вариацию можно заменить последовательностью вариаций того же порядка с неразветвленными осями. Действительно, пусть это не так. Будем понимать под расстоянием между вершинами графа минимальное возможное число ребер в соединяющей их цепочке, а под длиной оси — максимальное из расстояний между ее вершинами. Выберем среди осей вариаций данного порядка, неразложимых на неразветвленные, одну из самых длинных. Рассмотрим цепочку ребер, на которой эта длина реализуется. Так как ось разветвленная, какая-нибудь из вершин цепочки связана ребром с внутренней вершиной не принадлежащей цепочке. Применим IHX-преобразование для этих вершин (рис. 29). У обеих получившихся вариаций соответствующие цепочки, вопреки сделанному выбору, длиннее.

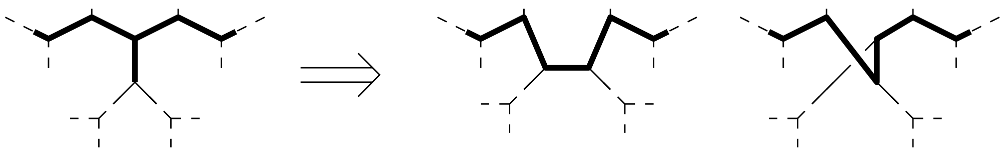


Рис. 29.

Остается показать, что вариацию порядка большего, чем n, с неразветвленной осью, можно заменить такой же вариацией порядка n. Для этого разрежем ее поперек так, чтобы порядок одной из частей был равен n. Проведем вариацию, отвечающую второй части. По теореме 6.1, это можно считать изотопией. Теперь, первая часть — это нужная нам n-вариация.

Определение 7.4. Пусть заузленный граф входит в некоторый шар $(n+1)$ петлями, зацепленными как на рис. 30a. Заменим этот фрагмент фрагментом, изображенным на рис. 30b. Эта операция будет называться *накидыванием петли порядка n*.

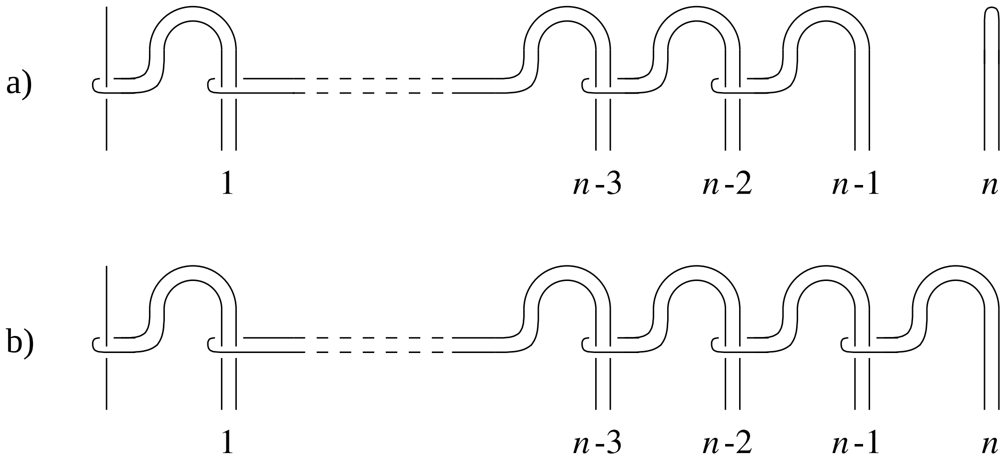


Рис. 30.

Теорема 7.5. *Накидыванием петель порядка n можно получить из графа в точности те графы, которые ему $(n-1)$-эквивалентны.*

Доказательство. Всякий граф, который $(n-1)$-эквивалентен данному, можно получить из него n-вариациями с неразветвленными осями. Если игнорировать оснащения, такая ось полностью соответствует изображению на рис. 31a. Просматривая внутренние вершины слева направо и выворачивая, соответствующим образом, нужное число раз, можно добиться, чтобы ориентации в них были согласованы и оснащения внутренних ребер соответствовали рис. 31b. Оснащения ребер, ведущих к концевым вершинам, регулируются просто вращением соответствующего конца. Разрезаниями вдоль добьемся, чтобы каждая петля была зацеплена ровно за одну дугу.

Докажем, что n-вариация с такой осью эквивалентна накидыванию петли порядка n. Разрежем ее на 2-вариации и отрежем справа 1-вариацию (рис. 31c). Совершим поочередно все 2-вариации, начиная с левой. Поскольку каждая из них имеет не зацепленную с графом петлю, они могут быть реализованы изотопиями графа. Вид графа можно, в соответствии с замечанием 1.3, изобразить как на рис. 31d. Исследуемое преобразование сводится к 1-вариации. После изотопии (рис. 31e) видно, если смотреть только на верхнюю часть рисунка, что происходит как раз накидывание петли.

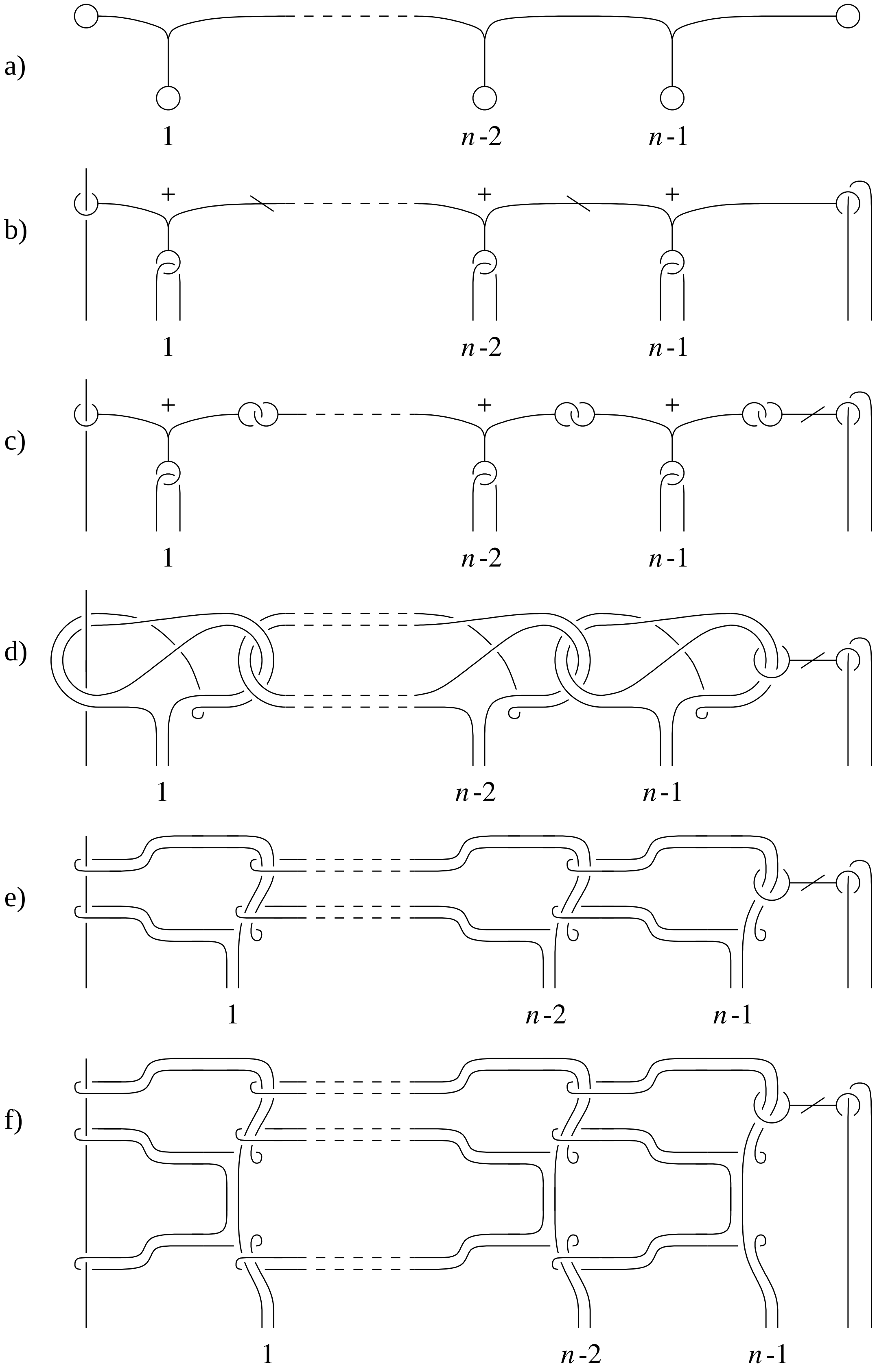


Рис. 31.

Обратно, в нижней части фрагмента, изображенного на рис. $30a$, можно провести изотопию (рис. $31f$). Тогда в верхней части рисунка мы увидим n-вариацию, которая эквивалентна накидыванию петли.

Теорема 7.6. *Если две n-вариации данного заузленного графа имеют подобные оси, то классы n-эквивалентности графов, которые получаются при осуществлении той или другой из них, совпадают.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что мы можем разрезать вариации вдоль, на части, каждая из которых соответствует выбору на каждом из дисков одной точки пересечения с графом. Куски подобных осей будут подобны. Рассмотрим изотопию общего положения, переводящую одну из подобных осей в другую, и будем следить за классом n-эквивалентности графа, получающегося при вариации, ось которой меняется. В процессе этой изотопии ось может несколько раз пересечь ребра графа. Отметим, что, поскольку диск пересекает граф в одной точке, он, в соответствии с замечанием 5.6, втягивается в окрестность одного отрезка, и пересечение графа таким отрезком равносильно пересечению ребром, ведущим к диску. По теореме 6.4, пересечение графа ребром оси равносильно добавлению $(n+1)$-вариации, и, значит, оно не меняет класса n-эквивалентности. Вне таких пересечений изотопический тип преобразованного графа вовсе не меняется. Значит, класс n-эквивалентности будет одинаков в начале и в конце изотопии, что и требовалось доказать.

§8. О вариативных схемах.

Определение 8.1. Назовем *направлением вариации* заузленного графа множество, состоящее из осей независимых вариаций этого графа, порядки которых, вообще говоря, различны. Совершить вариацию в этом направлении значит совершить все эти вариации.

Определение 8.2. *Вариативной схемой размерности r* заузленного графа называется упорядоченный набор $S = (S^{(1)}, \ldots, S^{(r)})$ направлений вариации этого графа, обладающий двумя свойствами. Во-первых, ось k-вариации входит не более, чем в k из направлений $S^{(i)}$. Во-вторых, объединение всех $S^{(i)}$ является направлением вариации, то есть все участвующие в схеме вариации независимы между собой.

Замечание 8.3. Это некоторое обобщение понятия вариативной схемы, определенного в [Г]. Старое понятие получится, если считать, что в схеме участвуют только оси 1-вариаций, диски которых пересекают граф в одной точке каждый, и воспользоваться замечанием 3.5.

Определение 8.4. Пусть имеется вариативная схема S графа K размерности r. Каждому мультииндексу $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in \{0,1\}^r$ отвечает направление $S(\sigma)$ вариации графа K, определенное следующим образом. Ось вариации входит в множество $S(\sigma)$, если она входит хотя бы в одно из $S^{(i)}$, а для всех $S^{(i)}$, в которые она входит, $\sigma_i = 1$. Результат вариации в этом направлении будет обозначаться $[S(\sigma)]$.

Замечание 8.5. Вовсе не обязательно $S^{(i)}$ отвечает какому-нибудь мультииндексу. Под направлениями схемы S будут пониматься $S(\sigma)$, а не $S^{(i)}$.

Определение 8.6. Две вариативных схемы одинаковой размерности S и S' называются *эквивалентными*, если $[S(\sigma)]$ и $[S'(\sigma)]$ изотопны для любого мультииндекса σ.

Теорема 8.7. О растворении n-вариации. *Каждая вариативная схема эквивалентна такой, в которой участвуют только оси 1-вариаций.*

Доказательство. Будем, независимо друг от друга, уничтожать, заменяя на 1-вариации, оси вариаций старших порядков. Для начала, разрежем поперек n концевых ребер выбранной оси n-вариации, то есть все кроме одного (рис. 32). Потом совершим оставшуюся n-вариацию. В соответствии с теоремой 6.1, можно считать, что эта вариация не изменила графа. Более того, граф не изменится, с точностью до изотопии, если совершить некоторые из отрезанных вариаций. Только когда будут проведены все эти 1-вариации, граф изменится, причем именно так, как при разрезанной n-вариации. Поместим получившиеся n1-вариаций, по одной, в те n множеств $S^{(i)}$, в которые входила n-вариация. Если она входила в меньшее число множеств, то в некоторые из них нужно поместить несколько вариаций. Получилась схема, эквивалентная исходной.

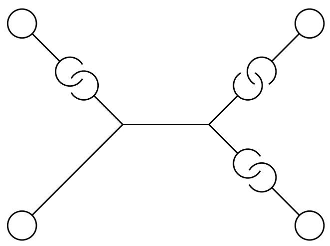


Рис. 32.

Определение 8.8. Далее будут использоваться следующие обозначения для работы с мультииндексами:

$\sigma+\nu$	$(\sigma+\nu)_i$— это остаток от деления на 2 числа $\sigma_i+\nu_i$,
$\sigma\nu$	$(\sigma\nu)_i=\sigma_i\nu_i$,
$\sigma\cup\nu$	$(\sigma\cup\nu)_i=max(\sigma_i,\nu_i)$,
$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}_i=1-\sigma_i$,
$\lvert\sigma\rvert$	$\lvert\sigma\rvert=\sigma_1+\dots+\sigma_r$ для $\sigma\in\{0,1\}^r$,
θ	$\theta_i=0$ для всех i.
ι	$\iota_i=1$ для всех i,
$\sigma\preceq\nu$	$\sigma_i\le\nu_i$ для всех i.

Теорема 8.9. О сопряженных схемах. *Пусть имеется вариативная схема S размерности r и мультииндекс ν . Тогда найдется такая вариативная схема S', что граф $[S(\sigma)]$ изотопен графу $[S'(\sigma+\nu)]$, для любого мультииндекса σ.*

Доказательство. Предположим сначала, что мультииндекс ν содержит только одну единицу, например, $\nu_m=1$. Окружим оси вариаций, входящие в множество $S^{(m)}$, непересекающимися шарами, не задевающими других осей. Это возможно, в силу их независимости. Для каждой из них найдем внутри соответствующего шара ось обратной вариации. Выберем ее так, чтобы она была независима с обращаемой, а результат их совместного применения был изотопен тождественному преобразованию с изотопией, оставляющей неподвижным дополнение шара. Теперь совершим вариацию в направлении $S(\nu)$, а образы найденных осей обратных вариаций поместим в те множества $S^{(i)}$, в которых были обращаемые вариации. Образы осей не совершенных вариаций оставим в тех множествах, в которых они были до преобразования, кроме $S^{(m)}$. Получится схема S'.

Если ν содержит более одной единицы, то нужно несколько раз совершить такие преобразования, по одному для каждой единицы.

Теорема 8.10. О поправках. *Пусть имеется r-мерная вариативная схема и набор заузленных графов K_σ, отвечающих мультииндексам $\sigma \in \{0,1\}^r$. Предположим, что, при любом σ, графы $[S(\sigma)]$ и K_σ $(r-1)$-эквивалентны. Тогда найдется такая схема S', что, при любом σ, графы $[S'(\sigma)]$ и K_σ изотопны. Более того, если изотопия уже имелась при всех $\sigma \preceq \nu$, можно считать, что $S(\nu)$ и $S'(\nu)$ совпадают.*

Доказательство. Расположим мультииндексы, при которых графы не изотопны, а также большие указанных, в неубывающем порядке. Будем последовательно подправлять направления вариации, отвечающие этим мультииндексам. Для этого надо выбирать набор осей r-вариаций, делающих граф $[S(\sigma)]$ изотопным графу K_σ, добиваться их независимости между собой и с имеющимися, а потом добавлять ко всем множествам $S^{(i)}$, для которых $\sigma_i = 1$. При этом $(r-1)$-эквивалентность не нарушится, и изменения произойдут только для тех мультииндексов, которые еще встретятся в этом переборе.

§9. О струнных зацеплениях.

Замечание 9.1. Под *струнным зацеплением* будет пониматься набор из k гладких вложений $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, таких, что образы не пересекаются, а, вне некоторого компакта, $f_i(x) = (x, i, 0)$. Под сдвигом струнного зацепления будет пониматься преобразование вида $f_i'(x) = f_i(x-t) + (t, 0, 0)$, причем это сдвиг вправо, при $t > 0$, или влево, при $t < 0$. При умножении струнных зацеплений второй сомножитель сдвигается вправо достаточно далеко, чтобы образы возмущенных участков второго зацепления были правее образов возмущенных участков первого зацепления; после этого, в левой части оставляют первое, а в правой — второе зацепление.

Теорема 9.2. О группе классов n-эквивалентности струнных зацеплений. *Классы n-эквивалентности струнных зацеплений с фиксированным числом струн образуют группу по отношению к операции умножения.*

Доказательство. Корректность определения умножения для классов очевидна. Ассоциативность и существование единицы получаются автоматически. Нужно только доказать существование обратного. Это делается индукцией по n. При $n = 0$ имеется только один класс эквивалентности, поскольку все струнные зацепления гомотопны между собой, а 1-вариации позволяют двум участкам струн пройти друг сквозь друга;

тем самым можно превратить гомотопию в изотопию. Поэтому можно считать, что обратный существует для предыдущего значения n, то есть имеется для данного зацепления L такое зацепление L_{n-1}, что LL_{n-1} $(n-1)$-эквивалентно тривиальному.

Струнное зацепление LL_{n-1} можно получить из тривиального n-вариациями с петлями, зацепленными только один раз за одну струну. Добавим к каждой из этих вариаций обратную к ней. Такой набор n-вариаций приводит к тривиальному струнному зацеплению. Теперь сдвинем далеко вправо все оси обратных вариаций. При этом, если они будут встречаться с неподвижными исходными осями, будем пользоваться теоремами 6.5 и 6.6. Появятся новые вариации, порядка большего, чем n, за расположением осей которых нам следить не нужно. Произведем все исходные и обратные, но не вновь появившиеся вариации. Получится струнное зацепление, состоящее из LL_{n-1}, образованного исходными вариациями, в левой части и некоторого зацепления L', образованного сдвинутыми обратными, в правой части. То есть это произведение $LL_{n-1}L'$, которое n-эквивалентно тривиальному, так как тривиальное получается из него в результате вновь появившихся вариаций, порядки которых больше n. Значит $L_{n-1}L'$ является искомым обратным к L (правым). Левый обратный строится совершенно аналогично, и, поскольку есть оба обратных, они совпадают и являются двусторонним обратным.

Теорема 9.3. О кристаллизации n-вариаций. *Пусть имеется r-мерная вариативная схема S струнного зацепления L. Предположим, что $[S(\sigma)]$ изотопен L, каждый раз, когда $|\sigma| < n$. Тогда существует вариативная схема S_*, эквивалентная S, у которой каждая ось вариации входит по крайней мере в n множеств $S_*^{(i)}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что исходное струнное зацепление, то есть $[S(\theta)]$, тривиально.Разрежем вариации вдоль так, чтобы каждая петля каждой оси зацеплялась только за одну струну и только один раз. Проведем индукцию по n. При $n = 1$ утверждение тривиально. Будем считать, что в схеме S каждая ось вариации входит по крайней мере в $(n-1)$ множеств $S^{(i)}$. Покажем, что эквивалентным преобразованием схемы можно, не изменяя этого обстоятельства, добиться, чтобы уменьшилось количество осей, входящих ровно в $(n-1)$ множеств $S^{(i)}$.

Выберем какой-нибудь мультииндекс σ, для которого $|\sigma| = n-1$ и $S(\sigma)$ не пусто. Будем сдвигать вправо все оси, принадлежащие этому направлению. Нам будут встречаться препятствия двух типов: петля движущейся оси может столкнуться с петлей неподвижной или незамкнутое ребро движущейся — с незамкнутым ребром неподвижной. Оба типа препятствий преодолеваются (теоремы 6.5 и 6.6 соответственно) добавлением новой вариации, порядок которой равен или на 1 больше суммы порядков столкнувшихся. Ось новой вариации нужно добавить ко всем множествам $S^{(i)}$, в которые входила хотя бы одна из столкнувшихся осей (ее порядок позволяет это сделать). Тогда схема заменится эквивалентной. Отметим, что новая ось входит во все множества $S^{(i)}$, у которых $\sigma_i = 1$, и еще хотя бы в одно. За поведением таких осей следить не надо, они “расступаются” перед движущимися осями, и их надо только приводить в порядок, то есть делать независимыми, после преодоления очередного препятствия. Так будем продолжать движение, пока все движущиеся оси не окажутся целиком правее всех неподвижных (вновь появившиеся могут заходить в обе области).

Теперь у нас имеется эквивалентная S вариативная схема S_1, оси которой подразделяются на три класса. Слева находятся те, который не входят хотя бы в одно из множеств $S_1^{(i)}$, для которых $\sigma_i = 1$. Справа находятся те, которые входят в точности в те множества $S_1^{(i)}$, для которых $\sigma_i = 1$. Наконец, входящие во все множества $S_1^{(i)}$, для которых $\sigma_i = 1$, и еще в какое-нибудь — могут занимать произвольное положение. Произведем вариацию в направлении $S_1(\sigma)$ и, удалив оси произведенных вариаций, поместим прочие (преобразованные) в множествах $S_2^{(i)}$ с теми же индексами, что и у содержавших их прежде множеств $S_1^{(i)}$. Получится вариативная схема S_2.

Если $\nu \succeq \sigma$, то $[S_2(\nu)] = [S_1(\nu)] = [S(\nu)]$. Если же нет, то не произошла ни одна из новых вариаций (третий класс). Значит, результат представляется в виде произведения $[S_1(\nu)][S_1(\sigma)] = [S(\nu)][S(\sigma)]$. Но $[S(\sigma)]$ тривиально, так как $|\sigma| < n$. Поэтому и здесь $[S_2(\nu)] = [S(\nu)]$. Итак, схема S_2 эквивалентна схеме S, но имеет меньше осей, входящих ровно в $(n-1)$ множеств. Повторяя этот процесс мы в конце концов вообще избавимся от таких осей, что и требовалось.

Пусть теперь $[S(\theta)]$ не тривиально. Тогда выберем струнное зацепление L, обратное $[S(\theta)]$ в группе классов $(r-1)$-эквивалентности. Пусть вариативная схема S' получается умножением схемы S справа на L. Тогда $[S'(\sigma)]$ будет $(r-1)$-эквивалентно тривиальному, при $|\sigma| < n$. По теореме 8.10, найдется схема S'', у которой $[S''(\sigma)]$ тривиально, при $|\sigma| < n$, и $[S''(\sigma)] = [S'(\sigma)]$ в остальных случаях. По уже доказанному, найдется схема S''_*, у которой $S''_*(\sigma)$ пусто, а $[S''_*(\sigma)]$ тривиально при $|\sigma| < n$, и $[S''_*(\sigma)] = [S(\sigma)]L$ в остальных случаях. Умножим ее справа на $[S(\theta)]$. У получившейся схемы S'_* по-прежнему $S'_*(\sigma)$ пусто, и $[S'_*(\sigma)] = [S(\theta)] = [S(\sigma)]$ при $|\sigma| < n$. В остальных случаях $[S'_*(\sigma)] = [S(\sigma)]L[S(\theta)]$ $(r-1)$-эквивалентно $[S(\sigma)]$. Теперь достаточно применить теорему 8.10, чтобы заменить $(r-1)$-эквивалентность изотопией, и мы получим нужную схему S_*.

Теорема 9.4. *Пусть $G(n)$ — группы классов n-эквивалентности струнных зацеплений с некоторым фиксированным числом струн. Пусть $G(n,k)$ ядро проекции $\rho_{n,k}\colon G(n) \to G(k)$, при $0 \le k \le n$. Тогда*

(1) $G(n) = G(n,0) \supset G(n,1) \supset \cdots \supset G(n,n) = 1$,

(2) $G(n,k-1)/G(n,k)$ *— абелева группа, зависящая от k, но не от n,*

(3) $[G(n,k), G(n,l)] \subset G(n, min(k+l+1, n))$.

Доказательство. Первое равенство выражает тот простой факт, что все струнные зацепления с данным числом струн 0-эквивалентны (см. доказательство теоремы 9.2). Включения отражают то, что из $(k+1)$-эквивалентности следует k-эквивалентность. Возможность факторизации не вызывает сомнений, так как $G(n,k)$— ядро гомоморфизма $\rho_{n,k}$. Поскольку $\rho_{n,k}$ — эпиморфизм, $G(k) = G(n)/G(n,k)$. Значит,

$$G(n,k-1)/G(n,k) = \rho_{n,k}(G(n,k-1)) = Ker\,\rho_{k,k-1} = G(k,k-1).$$

Пусть струнное зацепление L_1 представляет класс из $G(n,k)$, а L_2 — класс из $G(n,l)$, и пусть L'_1 и L'_2 представляют, соответственно, классы обратные к классам

L_1 и L_2. Тогда L_1 и L_1' — k-эквивалентны, а L_2 и L_2' — l-эквивалентны тривиальному струнному зацеплению. Значит, их можно получить из тривиального наборами $(k+1)$- или, соответственно, $(l+1)$-вариаций. Будем считать, что $k+l+1 \leq n$, иначе можно просто уменьшить k или l. Расположим эти наборы на тривиальном струнном зацеплении, изолированно друг от друга, так, чтобы ими создавались, слева направо, L_1, L_2, L_1' и L_2'. Определим вариативную схему S размерности $k+l+2$ для тривиального струнного зацепления, включив в $S^{(i)}$ все вариации, создающие L_1 и L_1' при $i \leq k+1$, и все вариации, создающие L_2 и L_2' при $i > k+1$. Тогда среди $[S(\sigma)]$ есть струнные зацепления четырех типов: тривиальное, L_1L_1', L_2L_2' и $L_1L_2L_1'L_2'$. Последний тип появляется только при $\sigma = \iota$, а первые три n-эквивалентны тривиальному. По теореме 8.10, найдется вариативная схема S', размерности $k+l+2$, у которой $[S'(\iota)] = L_1L_2L_1'L_2'$, а остальные $[S'(\sigma)]$ тривиальны. Тогда, по теореме 9.3, найдется аналогичная схема S_*, у которой каждая ось входит во все $k+l+2$ множеств $S_*^{(i)}$ и, следовательно, имеет порядок не меньше, чем $k+l+2$. Вариациями с такими осями струнное зацепление $L_1L_2L_1'L_2' = [L_1, L_2]$ получается из тривиального, и, значит, $(k+l+1)$-эквивалентно ему. Поэтому его класс лежит, как и требовалось, в $G(n, k+l+1)$. Коммутативность фактор-групп — очевидное следствие этого.

Замечание 9.5. Струнное зацепление является ключевым случаем вложенного графа. К нему полностью сводится исследование оснащенных вложений связного графа в $\mathbb{R}^3$, а для более сложных ситуаций это важный рабочий инструмент.

§10. Инварианты конечной степени.

Определение 10.1. Отображение u в абелеву группу G некоторого множества классов изотопии вложений графа в трехмерное многообразие называется *инвариантом степени* n, если:

(1) область определения инварианта u вместе с каждым классом включает все классы, которые ему $(n-1)$-эквивалентны;

(2) если вариативная схема S размерности $n+1$ такова, что $u([S(\sigma)])$ определены при любых $\sigma \in \{0,1\}^{n+1}$, то

$$\sum_{\sigma \in \{0,1\}^{n+1}} u([S(\sigma)])(-1)^{|\sigma|} = 0. \qquad (1)$$

Замечание 10.2. Пункт (2) определения 10.1 совершенно стандартен, если учесть теорему 8.7 и замечание 8.3. Первый пункт является новым. Его появление вызвано несколькими причинами. Во-первых, для вложений графа в многообразие (в отличие от узлов в сфере, например) отнюдь не очевиден тот общий набор ситуаций, для которых инвариант следует определять. Во-вторых, попытки работать в слишком широком классе приводят к тому, что приходится отказаться рассматривать в качестве инвариантов конечной степени, например, числа Милнора зацеплений (не струнных). В смысле данного определения они имеют, разумеется, конечную степень. В-третьих, они просто более соответствуют природе изучаемого объекта. В этом смысле все аналогично теории препятствий.

Теорема 10.3. О тонкости n-эквивалентности. *Если заузленные графы n-эквивалентны, то у них совпадают все инварианты, степень которых не превосходит n.*

Доказательство. Поскольку графы n-эквивалентны, они входят в области определения одних и тех же инвариантов, степени не превосходящей $n+1$. Пусть граф K' получается из графа K $(n+1)$-вариацией с осью T, и пусть u инвариант степени $k \leq n$. Рассмотрим $(k+1)$-мерную вариативную схему S для графа K, у которой каждое $S^{(i)}$ состоит из одной оси T. Тогда $[S(\iota)] = K'$, а в остальных случаях $[S(\iota)] = K$. Поэтому

$$0 = \sum_{\sigma \in \{0,1\}^{k+1}} u([S(\sigma)])(-1)^{|\sigma|} =$$
$$= \sum_{\sigma \in \{0,1\}^{k+1}} u(K)(-1)^{|\sigma|} + [u(K') - u(K)](-1)^{|\iota|} = [u(K') - u(K)](-1)^{|\iota|},$$

то есть $u(K') = u(K)$. В силу теоремы 7.3, инварианты будут совпадать для любых n-эквивалентных графов.

Теорема 10.4. О различении классов для струнных зацеплений. *Любые два струнных зацепления (с одинаковым числом струн), которые не являются n-эквивалентными, различимы инвариантами степени n.*

Доказательство. Пусть k — наименьшее число, при котором выбранные струнные зацепления (L_1 и L_2) не являются k-эквивалентными. Тогда $0 < k \leq n$. Выберем в классе обратном классу $(k-1)$-эквивалентности A, которому принадлежат L_1 и L_2, струнное зацепление L. Определим отображение $\rho\colon A \to G(k, k-1)$, в обозначениях теоремы 9.4, полагая, что струнному зацеплению X ставится в соответствие класс k-эквивалентности произведения XL. То, что этот класс действительно лежит в ядре гомоморфизма $\rho_{k,k-1}$, гарантируется выбором L. Заметим, что $G(k, k-1) = G(k, k-1)/\{1\} = G(k, k-1)/G(k, k)$ — абелева группа. Поскольку L_1 и L_2 не k-эквивалентны, $\rho(L_1) \neq \rho(L_2)$.

Докажем, что ρ — инвариант степени k. Пусть S — вариативная схема размерности $k+1$, у которой $[S(\sigma)] \in A$ при любом σ. Умножив ее справа на L мы получим схему S_1, у которой $[S_1(\sigma)] \in \rho([S(\sigma)])$. Пусть

$$u(\sigma) = -(-1)^{|\sigma|} \sum_{\tau \preceq \sigma} \rho([S(\tau)])(-1)^{|\tau|}.$$

Поскольку принадлежащие этим классам струнные зацепления $(k-1)$-эквивалентны тривиальному, их можно создать k-вариациями. Зафиксируем такой набор вариаций для каждого мультииндекса кроме ι. Разместим оси этих наборов вдоль тривиального зацепления так, чтобы оси каждого следующего набора были полностью правее осей предыдущего (порядок наборов не важен). Образуем вариативную схему S_2, помещая в множества $S_2^{(i)}$ оси из наборов, отвечающих мультииндексам, у которых $\sigma_i = 1$. Тогда для $\upsilon \neq \iota$:

$$[S_2(\upsilon)] \in \sum_{\sigma \preceq \upsilon} u(\sigma) = -\sum_{\sigma \preceq \upsilon} (-1)^{|\sigma|} \sum_{\tau \preceq \sigma} \rho([S(\tau)])(-1)^{|\tau|} =$$
$$= -\sum_{\tau \preceq \upsilon} \rho([S(\tau)])(-1)^{|\tau|} \sum_{\sigma : \tau \preceq \sigma \preceq \upsilon} (-1)^{|\sigma|} = -\rho([S(\upsilon)]).$$

Последнее равенство фиксирует тот факт, что при $\tau \neq \upsilon$ во внутренней сумме поровну положительных и отрицательных единиц. Аналогично, при $\upsilon = \iota$ имеем $[S_2(\iota)] = -\rho([S(\iota)]) - u(\iota)$. Поэтому

$$\sum_{\sigma \in \{0,1\}^{k+1}} [S_2(\sigma)]_k (-1)^{|\sigma|} = -\sum_{\sigma \in \{0,1\}^{k+1}} \rho([S(\sigma)])(-1)^{|\sigma|} - (-1)^{|\iota|} u(\iota) =$$
$$= -\sum_{\sigma \in \{0,1\}^{k+1}} \rho([S(\sigma)])(-1)^{|\sigma|} + \sum_{\tau \preceq \iota} \rho([S(\tau)])(-1)^{|\tau|} = 0$$

Здесь $[\,]_k$ обозначает класс k-эквивалентности $[\,]$.

Составим вариативную схему S_3, расположив рядом S_1 и S_2, и считая,что $S_3^{(i)} = S_1^{(i)} \cup S_2^{(i)}$. При $\sigma \neq \iota$ струнное зацепление $[S_3(\sigma)]$ k-эквивалентно тривиальному. По теореме 8.10 найдется схема S_4, у которой $[S_4(\sigma)]$ тривиально при $\sigma \neq \iota$, а $[S_4(\iota)] = [S_3(\iota)]$. По теореме 9.3, имеется эквивалентная S_4 схема S_*, у которой каждая ось входит во все $k+1$ множеств $S_*^{(i)}$, а, значит, имеет порядок не меньше, чем $k+1$. Поэтому $[S_*(\iota)]_k = 0$. Убедимся теперь, что для ρ выполнено условие (1):

$$\sum_{\sigma \in \{0,1\}^{k+1}} \rho([S(\sigma)])(-1)^{|\sigma|} = \sum_{\sigma \in \{0,1\}^{k+1}} [S_1(\sigma)]_k (-1)^{|\sigma|} =$$
$$= \sum_{\sigma \in \{0,1\}^{k+1}} [S_1(\sigma)]_k (-1)^{|\sigma|} + \sum_{\sigma \in \{0,1\}^{k+1}} [S_2(\sigma)]_k (-1)^{|\sigma|} =$$
$$= \sum_{\sigma \in \{0,1\}^{k+1}} ([S_1(\sigma)]_k + [S_2(\sigma)]_k)(-1)^{|\sigma|} =$$
$$= \sum_{\sigma \in \{0,1\}^{k+1}} [S_3(\sigma)]_k (-1)^{|\sigma|} = [S_3(\iota)](-1)^{|\iota|} = [S_4(\iota)](-1)^{|\iota|} = [S_*(\iota)](-1)^{|\iota|} = 0.$$

Замечание 10.5. В теореме 10.4 инвариант степени k определялся на классе $(k-1)$-эквивалентности. Теми же средствами он мог быть определен на классе $Entier(k/2)$-эквивалентности. Вообще, тут существенна только коммутативность соответствующей группы. Для группы узлов, то есть струнных зацеплений с одной струной, которая коммутативна, инвариантом степени k является просто класс k-эквивалентности. Этот случай, впрочем, был разобран ранее ([Г]).

Замечание 10.6. При соответствующем определении инварианта конечной степени со значениями в произвольной (не обязательно абелевой) группе, таким инвариантом (степени n), причем универсальным, для струнных зацеплений оказывается класс n-эквивалентности.

Замечание 10.7. Используя специальную алгебраическую технику, которая будет описана в другой работе, можно показать, что инварианты конечной степени (в обычном смысле), определенные для всех струнных зацеплений, различают их классы n-эквивалентности, причем, вероятно, для этого достаточно и инвариантов степени не выше n.

Замечание 10.8. Нельзя, однако, в общей ситуации различать классы n-эквивалентности только инвариантами степени n (в обычном смысле), определенными на слишком широком множестве (например, на классе 0-эквивалентности). Простейший пример — Arf-инвариант для двухкомпонентных зацеплений. Он имеет степень 2 для четно зацепленных компонент, но на нечетно зацепленные — продолжим только инвариантом степени 3. Различаемые им классы не удается различить инвариантами степени 2, определенными и для таких зацеплений.

Библиография.

[Г1] М. Н. Гусаров, *Об n-эквивалентности узлов и инвариантах конечной степени*, Зап. научн. семин. ПОМИ, **208** (1993), 152–173.

[Г2] М. Н. Гусаров, *Инварианты конечной степени и n-эквивалентность зацеплений*, диссертация, СПб.,1997.

[H] K. Habiro, *Clasper theory and its applications*, Lecture Notes of the workshop at Waseda University, Karuizawa, September 1997.