```
GG[GD@Knot[4, 1], {1}, F]
```

Example: 4_1

$$F\left[\{Am_{1,2}\},\begin{pmatrix} -\frac{-1+T_2-T_1T_2+T_3-T_1T_3-T_2T_3+T_1T_2T_3}{T_1T_3} & \frac{(-1+T_1)(1-T_2+T_1T_2)(-1+T_3)}{T_1T_3} & -\frac{(-1+T_1)(-1+T_2)}{T_1} \\ -\frac{(-1+T_2)(-1+T_3)}{T_1T_3} & \frac{-1+T_1+T_2-T_1T_2+T_3-T_2T_3+T_1T_2T_3}{T_1T_3} & -\frac{-1+T_2}{T_1} \\ \frac{T_2(-1+T_3)}{T_3} & -\frac{(-1+T_1)T_2(-1+T_3)}{T_3} & T_2 \end{pmatrix}\right]+$$

$$F\left[\{Am_{2,1}\},\begin{pmatrix} \frac{1}{T_2} & \frac{-1+T_1}{-T_1-T_2+T_1T_2} & -\frac{(-1+T_1)(-1+T_2)^2}{T_2(-T_1-T_2+T_1T_2)} \\ \frac{-1+T_2}{T_2} & \frac{1-2T_1-T_2+T_1T_2}{-T_1-T_2+T_1T_2} & -\frac{(-1+T_2)(-1+T_1+T_2-2T_1T_2-T_2^2+T_1T_2^2)}{T_2(-T_1-T_2+T_1T_2)} \\ 0 & 0 & T_2 \end{pmatrix}\right]+$$

$$F\left[\{Ap_{1,2}\},\begin{pmatrix} -\frac{1-2T_1-T_2+T_1T_2}{-1+T_1+T_2} & \frac{(-1+T_1)^2(-1+T_2)}{-1+T_1+T_2} & 0 \\ \frac{T_1(-1+T_2)}{-1+T_1+T_2} & -\frac{T_1(1-T_1-2T_2+T_1T_2)}{-1+T_1+T_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]+F\left[\{Ap_{1,2}\},\begin{pmatrix} 1 & \frac{(-1+T_1)(1-2T_2-T_3+T_2T_3)}{-1+T_2+T_3} & -\frac{(-1+T_1)(-1+T_2)}{-1+T_2+T_3} \\ 0 & -\frac{T_1(1-2T_2-T_3+T_2T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{T_1(-1+T_2)}{-1+T_2+T_3} \\ 0 & \frac{T_2(-1+T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{T_3}{-1+T_2+T_3} \end{pmatrix}\right]$$

The Alexander Functional

```
FA[{x_}, γ_] := Simplify[
   Switch[x, Ap__, 1, Am__, -1] *
     Switch[x, _1,2, (γ2,2 γ3,3 - γ2,3 γ3,2)/(γ3,3 + γ1,3 γ3,2 - γ1,2 γ3,3),
      _2,1, (γ1,3 γ3,2 - γ1,2 γ3,3)/(γ3,2 - γ2,3 γ3,2 + γ2,2 γ3,3)] /. T_ → T];
GGA[K_, bb___] := GG[GD@K, {1}, FA, bb];
```

Example: 4_1

```
Simplify@With[{K = Knot[4, 1]},
  {GGA[K], Alexander[K][T], T ∂T Log[Alexander[K][T]]}]
```

$$\left\{\frac{T(-3+2T)}{1-3T+T^2},\ 3-\frac{1}{T}-T,\ \frac{-1+T^2}{1-3T+T^2}\right\}$$

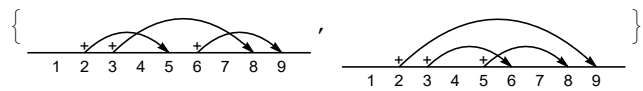
Testing for up to 7 crossings

```
Table[
 K → Simplify[GGA[K] - T ∂T Log[Alexander[K][T]]],
 {K, AllKnots@{3, 7}}]
```

$\{3_1 \to -1,\ 4_1 \to 1,\ 5_1 \to -2,\ 5_2 \to -2,\ 6_1 \to 0,\ 6_2 \to 0,\ 6_3 \to 0,$
$7_1 \to -3,\ 7_2 \to -3,\ 7_3 \to 4,\ 7_4 \to 4,\ 7_5 \to -3,\ 7_6 \to -1,\ 7_7 \to 2\}$

Invariance

```
Draw /@ {R3L = GD[Ap2,5, Ap3,8, Ap6,9],
  R3R = GD[Ap5,8, Ap2,9, Ap3,6]}
```




```
Simplify[
 GGA[R3L, {1, 4, 7, 10}] == GGA[R3R, {1, 4, 7, 10}] /.
  β10,b_ :→ 1 - β1,b - β4,b - β7,b]
```

True

Example: Degree 2 Gauss-Gassner for 4_1

```
GG[GD@Knot[4, 1], {1, 2}, F] /. F[y_List, γ_G] :→ F[Column@y, γ]
```

$$F\left[Am_{1,2},\begin{pmatrix} -\frac{-1+T_2-T_1T_2+T_3-T_1T_3-T_2T_3+T_1T_2T_3}{T_1T_3} & \frac{(-1+T_1)(1-T_2+T_1T_2)(-1+T_3)}{T_1T_3} & -\frac{(-1+T_1)(-1+T_2)}{T_1} \\ -\frac{(-1+T_2)(-1+T_3)}{T_1T_3} & \frac{-1+T_1+T_2-T_1T_2+T_3-T_2T_3+T_1T_2T_3}{T_1T_3} & -\frac{-1+T_2}{T_1} \\ \frac{T_2(-1+T_3)}{T_3} & -\frac{(-1+T_1)T_2(-1+T_3)}{T_3} & T_2 \end{pmatrix}\right]+$$

$$F\left[Am_{2,1},\begin{pmatrix} \frac{1}{T_2} & \frac{-1+T_1}{-T_1-T_2+T_1T_2} & -\frac{(-1+T_1)(-1+T_2)^2}{T_2(-T_1-T_2+T_1T_2)} \\ \frac{-1+T_2}{T_2} & \frac{1-2T_1-T_2+T_1T_2}{-T_1-T_2+T_1T_2} & -\frac{(-1+T_2)(-1+T_1+T_2-2T_1T_2-T_2^2+T_1T_2^2)}{T_2(-T_1-T_2+T_1T_2)} \\ 0 & 0 & T_2 \end{pmatrix}\right]+F\left[Ap_{1,2},\begin{pmatrix} -\frac{1-2T_1-T_2+T_1T_2}{-1+T_1+T_2} & \frac{(-1+T_1)^2(-1+T_2)}{-1+T_1+T_2} & 0 \\ \frac{T_1(-1+T_2)}{-1+T_1+T_2} & -\frac{T_1(1-T_1-2T_2+T_1T_2)}{-1+T_1+T_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]+$$

$$F\left[Ap_{1,2},\begin{pmatrix} 1 & \frac{(-1+T_1)(1-2T_2-T_3+T_2T_3)}{-1+T_2+T_3} & -\frac{(-1+T_1)(-1+T_2)}{-1+T_2+T_3} \\ 0 & -\frac{T_1(1-2T_2-T_3+T_2T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{T_1(-1+T_2)}{-1+T_2+T_3} \\ 0 & \frac{T_2(-1+T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{T_3}{-1+T_2+T_3} \end{pmatrix}\right]+F\left[\begin{matrix}Am_{2,3}\\Am_{4,1}\end{matrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{T_4} & 0 & -\frac{-1+T_1}{T_4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{T_1(-1+T_2)}{T_2} & 0 & -\frac{(-1+T_2)(-1+T_3)}{T_2} \\ 0 & 0 & \frac{T_1}{T_2} & 0 & -\frac{-1+T_3}{T_2} \\ \frac{-1+T_4}{T_4} & 0 & -\frac{(-1+T_1)(-1+T_4)}{T_4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix}\right]+F\left[\begin{matrix}Ap_{1,2}\\Ap_{3,4}\end{matrix},\begin{pmatrix} 1 & -\frac{-1+T_1}{T_4} & 0 & -\frac{(-1+T_1)(-1+T_2)}{T_2} & 0 \\ 0 & \frac{T_1}{T_4} & 0 & \frac{T_1(-1+T_2)}{T_2} & 0 \\ 0 & -\frac{(-1+T_3)(-1+T_4)}{T_4} & 1 & -\frac{-1+T_3}{T_2} & 0 \\ 0 & \frac{T_3(-1+T_4)}{T_4} & 0 & \frac{T_3}{T_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]+$$

$$F\left[\begin{matrix}Ap_{1,3}\\Am_{2,4}\end{matrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-T_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{-1+T_4-T_2T_4+T_5-T_2T_5-T_4T_5+T_2T_4T_5}{T_2T_5} & 0 & \frac{-1+T_2}{T_2} & -\frac{(-1+T_2)(-1+T_4)}{T_2} \\ 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(-1+T_4)(-1+T_5)}{T_2T_5} & 0 & \frac{1}{T_2} & -\frac{-1+T_4}{T_2} \\ 0 & \frac{T_4(-1+T_5)}{T_5} & 0 & 0 & T_4 \end{pmatrix}\right]+F\left[\begin{matrix}Ap_{1,3}\\Am_{4,2}\end{matrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-T_1 & -\frac{(-1+T_1)(-1+T_3)}{T_3} & \frac{(-1+T_1)(-1+T_3)(-1+T_4)}{T_3} \\ 0 & \frac{1}{T_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1 & \frac{T_1(-1+T_3)}{T_3} & -\frac{T_1(-1+T_3)(-1+T_4)}{T_3} \\ 0 & \frac{-1+T_4}{T_4} & 0 & \frac{1}{T_3} & -\frac{-1+T_4}{T_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_4 \end{pmatrix}\right]+$$

$$F\left[\begin{matrix}Ap_{2,4}\\Am_{1,3}\end{matrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{T_4} & -\frac{-1+T_1}{T_4} & \frac{-1+T_1}{T_1} & 0 & 0 \\ -\frac{(-1+T_2)(-1+T_4)}{T_4} & \frac{-1+T_1+T_2-T_1T_2+T_4-T_2T_4+T_1T_2T_4}{T_4} & 0 & 1-T_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ \frac{T_2(-1+T_4)}{T_4} & -\frac{(-1+T_1)T_2(-1+T_4)}{T_4} & 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]+F\left[\begin{matrix}Ap_{2,4}\\Am_{3,1}\end{matrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{T_3} & -\frac{-1+T_1}{T_3} & -\frac{(-1+T_1)(-1+T_2)}{T_2T_3} & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & \frac{T_1(-1+T_2)}{T_2} & 1-T_2 & 0 \\ \frac{-1+T_3}{T_3} & -\frac{(-1+T_1)(-1+T_3)}{T_3} & -\frac{-1+T_1+T_2-T_1T_2-T_1T_3-T_2T_3+T_1T_2T_3}{T_2T_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Video and more at http://www.math.toronto.edu/~drorbn/Talks/NCSU-1604/